Centro de Matemática. 12 de julio de 2004

Examen de Cálculo II

Ejercicio 1. Se considera la función de dos variables

$$f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}.$$

(a) Probar que $f(x,y)$ es una función acotada en el plano $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinar sus puntos críticos, y hallar los extremos relativos y absolutos en $\mathbb{R}^2$.

(c) Hallar extremos absolutos en el dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq R^2\}$, discutiendo según el valor de $R > 0$.

Ejercicio 2. Consideremos un dominio

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq ax+b\big\},$$

donde a, b son números positivos.

(a) Calcular el volumen del prisma definido por

$$\big\{(x,y) \in D, 0 \leq z \leq h\big\},$$

donde $h > 0$.

Se considera, un punto P de coordenadas (x_0, y_0, h), con x_0, y_0 arbitrarios, y la pirámide de base D y vértice P.

(b) Calcular el área de la intersección de la pirámide con el plano $z = z_0$, donde $0 \leq z_0 \leq h$.

(c) Demostrar que el volumen de la pirámide es $1/3$ del volumen del prisma calculado en (a).

Ejercicio 3. Se considera una aplicación

$$f = (f_1, f_2, f_3) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

de clase C^1, y un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, con $b = f(x_0, y_0)$. Se consideran las siguientes proposiciones:

(i) El diferencial df_a de f en el punto a es inyectivo.

(ii) Existe una bola $B = B(b, \varepsilon)$ de centro en $b = f(x_0, y_0)$, contenida en $\mathbb{R}^3$, y una aplicación $\varphi \colon B \to \mathbb{R}^2$, de clase C^1, tal que $\varphi(f(x,y)) = (x,y)$, para todo $(x,y) \in f^{-1}(B)$.

(a) Demostrar que (ii) implica (i).

(b) Asumiendo que el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

es no nulo en el punto a demostrar que la aplicación $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\tilde{f}(x,y,z) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y) + z)$$

es invertible.

(c) En las mismas condiciones que (b), demostrar que (ii) es cierto.

(d) Demostrar que (i) implica (ii).