Centro de Matemática. 5 de febrero de 2004

Examen de Cálculo II

Ejercicio 1. Se considera una función $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que verifica $F(1,2,3) = 5$. Se sabe que el plano tangente a la superficie de nivel $F(x,y,z) = 5$ en el punto $(1,2,3)$ tiene ecuación $x - y + 2z = 5$.

(a) Enunciar las condiciones necesarias para que exista una función de dos variables $z = f(x,y)$ en un entorno de $(1,2)$ tal que $F(x,y,z) = 5$ si y sólo si $z = f(x,y)$. Calcular el gradiente de f en el punto $(1,2)$.

(b) Calcular la derivada direcciónal de f en el punto $(1,2)$ con respecto de los vectores $(1,1)$ y $(1,-1)$.

(c) Hallar a, b, c reales para que $F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ verifique las condiciones de la parte (a).

Ejercicio 2. Consideremos el rectángulo

$$R(x,y) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le s \le x, 0 \le t \le y\}.$$

(a) Calcular

$$F(x,y) = \iint_{R(x,y)} (s+t)dsdt.$$

(b) Determinar los puntos críticos de $F(x,y)$ en todo el plano y clasificarlos.

(c) Determinar los extremos absolutos de $F(x,y)$ en el dominio de los puntos que verifican $x \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 3$.

Ejercicio 3. Se considera el conjunto

$$E_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le r^2\right\}.$$

(a) Calcular las integrales

$$N(r) = \iint_{E_r} (xy)^2 dxdy, \qquad D(r) = \iint_{E_r} (x+1)^2 dxdy,$$

y el límite

$$\lim_{r\to 0} \frac{N(r)}{D(r)}.$$

(b) Demostrar, que si f es una función de dos variables continua en el origen, entonces se verifica

$$\lim_{r\to 0} \frac{\iint_{E_r} f(x,y)dxdy}{\text{área}(E_r)} = f(0,0).$$

(c) Demostrar, que si f, g son dos funciones de dos variables continuas en el origen, y tales que $g(0,0) \neq 0$ entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{\iint_{E_r} f(x,y)dxdy}{\iint_{E_r} g(x,y)dxdy} \to \frac{f(0,0)}{g(0,0)},$$

y calcular con este resultado el límite de la parte (a).