Centro de Matemática. **Examen de Cálculo II** 19 de febrero de 2003

Ejercicio 1. Sean $U \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto y convexo, $f\colon U \to \mathbf{R}$ una función diferenciable en U, y c una constante real. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(a) $\|d_x f(v)\| \leq c\|v\|$ para todo $x \in U$ y todo $v \in \mathbf{R}^n$.

(b) $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ para todos $x, y \in U$

(c) f es uniformemente continua en U.

(i) Probar que (a) implica (b).
(ii) Probar que (b) implica (a).
(iii) Probar que (b) implica (c).
(iv) Mostrar con un contraejemplo que (c) no implica (b).

Ejercicio 2. Sea

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0\right\}.$$

(a) Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0) de D.
(b) Determinar el volumen $V(x_0, y_0, z_0)$ del tetraedro limitado por este plano tangente y los planos coordenados. (Recordar que volumen de un tetraedro es el producto del área de la base por la altura dividido 3.)
(c) Definir $f\colon \overline{D} \to \mathbf{R}$ continua, y tal que $f(x, y, z) = 1/V(x, y, z)$ en D. Estudiar los extremos absolutos condicionados de f a $\overline{D}$. ($\overline{D}$ es la clausura de D).
(d) Estudiar los extremos absolutos de la función $V(x, y, z)$ condicionados a D.

Ejercicio 3. Se consideran los subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ definidos como

$$\begin{aligned} C &= [0, 1] \times [0, 1] \\ D &= \{(x, y) \in C \colon x = 1/n \ (n = 1, 2, \dots)\} \\ F &= \{(x, y) \in D \colon y \text{ es racional}\} \end{aligned}$$

y las funciones f y g definidas de C en $\mathbf{R}$ como $g(x, y) \equiv 1$ y

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) \in F \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Probar que D tiene medida de Jordan nula, y que f es integrable en C. Sugerencia: Dado $\varepsilon > 0$ considerar los rectángulos de la forma $[0, \varepsilon/2] \times [0, 1]$ y $[1/n - \varepsilon/(2^{n+1}), 1/n + \varepsilon/(2^{n+1})] \times [0, 1]$ $(n = 1, 2, \dots)$.
(b) Probar que $g - f$ es integrable en C y calcular $\iint_C (g - f)$ y $\iint_C f$. Sugerencia: Calcular las sumas superiores correspondientes a $g - f$ en una partición relacionada con los rectángulos de la parte (a).
(c) ¿Para que valores de $x \in [0, 1]$ existe la integral $\int_0^1 f(x, y)dy$? ¿Se puede aplicar el teorema de la integral iterada? ¿Existe la integral iterada $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy$? Justificar.