Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
29 de enero de 2003

1. Calcular el volumen del conjunto de puntos interiores al cilindro $2x = x^2 + y^2$ y a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y que cumplen $z \geq 0$.

2. Sean
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 25$$
$$h(x, y, z) = y - \frac{1}{2}x^2 + 5$$
$$f_\lambda(x, y, z) = \varphi_\lambda(x, y) + (1 - \lambda)z^2$$
   (a) Hallar los puntos críticos de f_λ condicionados a $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, discutiendo según $\lambda \in \mathbb{R}$. Hallar $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ para que f_{λ_0} tenga infitos puntos críticos condicionados a $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$.
   (b) Clasificarlos según λ. Si $\varphi_\lambda(x, y) = \lambda x + e^{(1-\lambda)}y$, determinar los extremos absolutos condicionados de f_{λ_0}, donde λ_0 es el hallado en la parte anterior.

3. (a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de calse C^1 y $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$. Sea
$$\psi : B_{((p_1,p_2),r)} \subset \mathbb{R}^2 \to I \subset \mathbb{R}$$
   la función implícita de f en un entorno de p. Sean $S = f^{-1}(f(p))$ y $\varphi : B_{((p_1,p_2),r)} \to (B_{((p_1,p_2),r)} \times I)$ tal que
$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)).$$
   Probar que el espacio tangente a p en S, que se anota T_pS cumple:
$$T_pS = \left\langle \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p_1, p_2), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p_1, p_2) \right\} \right\rangle.$$
   Concluir que $\dim T_pS = 2$.
   (b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x, y, z) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2 z} dt.$$
   Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que la ecuación $f(x, y, z) = k$ define localmente z en función de x e y. Probar que para estos valores de k, la superficie $f(x, y, z) = k$ es una superficie de revolución alrededor del eje Oz.
   (c) Hallar una base y la dimensión de $T_{(1,1,0)}f^{-1}(2)$.