**Centro de Matemática.** 12 de diciembre de 2003

## Examen de Cálculo II

**Ejercicio 1.** Se considera el volumen $V(x, y, z)$ del paralelepípedo de lados paralelos a los planos coordenados, con vértices $(0, 0, 0)$ y $(x, y, z)$.

(a) Hallar los extremos absolutos de $V(x, y, z)$ cuando el vértice $(x, y, z)$ pertenece al conjunto

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

(b) Calcular

$$\iiint_D V(x, y, z)dxdydz.$$

**Ejercicio 2.**

(a) Demostrar que la ecuación

$$z^3 + x^2 + xy + y^2 + z = 0$$

tiene una única solución $z$ para cada punto $(x, y)$ del plano, que define una función que llamamos $f(x, y)$.

(b) Determinar el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ de los puntos $(x, y)$ para los que existe $z$ tal que se puede aplicar el teorema de la función implícita en $(x, y, z)$, y determinar los puntos críticos de $f$ en el dominio $D$ hallado.

(c) Demostrar que $f(x, y) \leq 0$ en $D$ y clasificar los puntos críticos hallados. (Sugerencia: demostrar que $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.)

**Ejercicio 3.**

(a) Calcular

$$\iiint_A (x^2 + y + z^2)^3 dxdydz,$$

donde

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) Calcular

$$\iiint_B (x^2 + y^2)dxdydz,$$

donde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ x \geq 0\}.$$