Centro de Matemática 8 de diciembre de 2004

Examen de Cálculo II

Ejercicio 1. Se considera el conjunto M de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que verifican:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 6z^2 = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinar los puntos críticos de f, la función distancia al origen, condicionados al conjunto M.

(b) Demostrar que M es un conjunto compacto.

(c) Estudiar extremos absolutos de f condicionados a M.

Ejercicio 2. Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(y-x)}{x^2+y^2} & \text{si } y < x \\ y - x & \text{si } y \geq x \end{cases}$$

(a) Probar que f es contina en $\mathbb{R}^2$.

(b) Investigar la existencia de derivadas direccionales en los puntos de la forma (a,a), con a real.

(c) Calcular

$$\iint_D f(x,y)dxdy,$$

donde el dominio de integración verfica

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Ejercicio 3.

(a) Demostrar que la ecuación de la elipse $x^2 + 3y^2 = 12$, en el punto $(3,1)$ define una función $y(x)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $y(x)$ en $x = 3$.

(b) Se considera el conjunto de los triángulos isósceles inscriptos en la elipse de (a), con vértice fijo en $(0,-2)$ y base paralela al eje Ox. Determinar los triángulos de área máxima y mínima. Justificar la existencia de extremos absolutos.

(c) Determinar el volumen del cuerpo exterior al cono e interior al elipsoide que se obtienen al girar el triángulo de área máxima y la elipse de la parte anterior alrededor del eje Oy.