Centro de Matemática. 11 de agosto de 2003

Examen de Cálculo II

Ejercicio 1. Consideremos la función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

(a) Hallar sus puntos estacionarios y clasificarlos.
(b) Hallar los extremos absolutos de f en la región determinada por

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0, \\ x + y + 3 \geq 0. \end{cases}$$

(c) Calcular $\iint_C f$ siendo C el disco unidad.

Ejercicio 2.
(a) Se considera el círculo $C = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Realizar el cambio de variables

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$$

para demostrar que

$$I = \iint_C \frac{1}{1 - xy} dxdy = 2 \iint_D \frac{1}{2 - u^2 + v^2} dudv,$$

donde D es una región que se determinará.
(b) Expresar I mediante una integral simple.

Ejercicio 3. (a) Probar que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica

- $x^2 + 2xy + 3y^2 \leq 4(x^2 + y^2)$.
- $x^2 + 4xy + 6y^2 \geq \frac{1}{4}\big(x^2 + y^2\big)$.

(b) Utilizando (a), probar que si

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 6y^2 - \log(x^2 + 2xy + 3y^2),$$

entonces

$$\min_{\sqrt{x^2+y^2}=\rho} f(x, y) \to +\infty \quad \text{si} \quad \rho \to +\infty$$

(c) Hallar el mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}^2$.