Centro de Matemática. 16 de agosto de 2005

Examen de Cálculo II

Ejercicio 1. Se consideran las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas mediante

$$f(x,y) = (y - x^2)^2, \qquad g(x,y) = f(x,y) + y^2.$$

(a) Hallar, en caso de que existan, los extremos relativos y absolutos de g en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Probar que existen extremos absolutos de f en el dominio

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) \leq 1\}.$$

(c) Hallar los extremos absolutos de la parte anterior.

(d) Se considera el conjunto

$$S^+ = \{(x,y) \in S \colon x \geq 0\}.$$

Demostrar que

$$\iint_S |x|^3 f(x,y)dxdy = 2\iint_{S^+} x^3 f(x,y)dxdy.$$

Ejercicio 2. Consideremos una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, con $0 < a < b$ y $f(x) \geq 0$. Sean V_{ox} y V_{oy} los volúmenes de revolución generados por el conjunto $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ obtenidos al girar alrededor de los ejes Ox y Oy respectivamente.

(a) Partiendo de la definición de volúmen de un cuerpo sólido V como $V = \iiint_V 1dxdydz$ demostrar

(i) $V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

(ii) $V_{oy} = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

(b) Calcular la integral triple de la función $g(x,y,z) = z$ en el dominio

$$\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, \\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq \frac{z^2}{9}. \end{cases}$$

Ejercicio 3. Decimos que una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es *propia* cuando es continua y la preimagen de todo conjunto compacto es compacta ($f^{-1}(K)$ es compacto en $\mathbb{R}^n$ cuando K es compacto en $\mathbb{R}^m$). Decimos además que f es *cerrada* cuando la imagen de todo conjunto cerrado es cerrada ($f(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}^m$ cuando C es cerrado en $\mathbb{R}^n$). Análogamente decimos que f es *abierta* cuando la imagen de todo conjunto abierto es abierta ($f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^m$ cuando U es abierto en $\mathbb{R}^n$).

(a) Probar que toda función propia es cerrada.

(b) Probar que si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 es tal que df_x es invertible para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces f es abierta.

(c) Probar que toda $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ propia y en las hipótesis de (b) es sobreyectiva. Si además es inyectiva, probar que su inversa es diferenciable.