Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 9

Ejercicios básicos

1. Consideremos la función: $f(x) = e^x - x - 2 + cosx - \frac{x^3}{6}$

   (a) Encuentra el polinomio de Mac Laurin de orden 4 de f.

   (b) Analiza si f presenta un máximo o un mínimo relativo en 0.

   (c) Calcula, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$

2. Aplicando desarrollos de Mac Laurin calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x - L(1+x)}{x^2} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{L(1+x) - sen\ x}{x^2 + 4x^3} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{sen\ x - x\ cos\ x}{x^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+).$$

Ejercicios de nivel medio

3. Encuentra el polinomio de Mac Laurin de orden n de las siguientes funciones:

$$\frac{1}{2-x} \qquad \frac{1}{a-x} \qquad \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \qquad L(1-x) \qquad L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$e^x - cos(x) \qquad sen(x)\ cos(x) \qquad sen^2 x \qquad \frac{1+x^2}{1-x^2}\ (orden\ 4) \qquad L(1+senx)\ \ (orden\ 4)$$

4. Sea f una función con derivada tercera continua en $(-\epsilon, \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$, tal que $f(0) = 1;\ f'(0) = -3;\ f''(0) = 2.$

   (a) Determina el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de la función:

$$\Phi : \Phi(x) = f(x) - xf'(x) + \int_0^x f(t)\ dt$$

   (b) Halla $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x) - a - bx}{x^2} \ = \ c \neq 0$$

5. Aplicando desarrollos de Mac Laurin calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2 + senx - x}{1 - cosx - x^2/2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{L(1+x) - x - x^2/2}{tgx - senx}$$

6. En cada uno de los siguientes casos determina los valores de los parámetros para obtener un infinitésimo del mayor orden posible para $x \to 0$. Encuentra la parte principal.

$$a(e^x - 1) - bx^2 - x \qquad x + asenx + btgx \qquad e^x\ senx - (ax + bx^2 + cx^3)$$

$$a(e^x - x - 1) + bsenx + cL(1+x) - x \qquad cosx - \frac{1 + 2ax^2}{1 + 3bx^2} \qquad L(1+x) - \frac{ax + bx^2}{1 + cx}$$

7. Usando el desarrollo de Mac Laurin de orden 8 de la función *sen* x calcula un valor aproximado de *sen* 1 y demuestra que el error cometido es menor que $3.10^{-6} = 0,000003$.

8. Usando el desarrollo de Mac Laurin de $L(1+x)$, calcula $L(1,5)$ con error menor que $0,001$. Compara tu resultado con el valor para $L(1,5)$ que te da la calculadora. Vuelve a hacer el ejercicio con error menor que $0,0001$.

9. ¿Cuál es el comportamiento local de $f(x) = e^x - senx - 1 - x^2/2 - x^3/3$ alrededor de 0?. Bosqueja f en algún entorno de 0.

10. (a) Encuentra la expresión de Lagrange para el resto de orden 4 de la función *sen* x.
    (b) Prueba que $|r_4(x)| \le \frac{1}{2^5\ 5!}$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
    (c) Calcula un valor aproximado de la integral

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} sen\ t^2\ dt$$

y encuentra una cota del error cometido.

Ejercicios complementarios

11. (a) Demuestra que para todo $x > 0$ se verifica:

$$0 < e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) < \frac{x^4}{24}$$

    (b) Demuestra que para todo $x \in [0, \frac{1}{3}]$ se verifica:

$$0 < e^{-x^2} - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) < \frac{x^4}{24.3^4}$$

    (c) Demuestra que:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}\ dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2.5.3^5} - \frac{1}{6.7.3^7} + k$$

en donde k es un número real que cumple $0 < k < 0,00000043$.

12. (a) Muestra que

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ .\ .\ .\ . \ + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

válido para $x > -1$, en donde c verifica $|c| < |x|$. Intenta aplicar este desarrolo para calcular $L2$ con error menor que $0,001$. Obtendrás que, para tales efectos, será necesario tomar $n \geq 1000$. Esto indica que, en este caso, este procedimiento no es demasiado útil. En las partes que siguen verás cómo puede mejorarse el cálculo.

(b) Demuestra que si $0 < x < 1$ entonces

$$L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ .\ .\ .\ . \ - \frac{x^n}{n} - \frac{1}{(n+1)(1+d)^{n+1}} x^{n+1}$$

para algún d con $0 < d < x$.

(c) Aplicando lo anterior para $n = 6$ y para $x \in (0,1)$ podemos asegurar que existen puntos c y d entre 0 y 1 tales que:

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7\ (c+1)^7} \qquad \text{con } 0 < c < 1$$

y que

$$L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7\ (d+1)^7} \qquad \text{con } 0 < d < 1$$

Se tiene entoncs que

$$L\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + \frac{x^7}{7\ (c+1)^7} + \frac{x^7}{7\ (d+1)^7}$$

Usando esta expresión muestra que, de una manera muy simple, es posible calcular $L2$ con error menor que $0,001$.

13. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que f es de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}$ y que $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

(b) ¿Cuál es el desarrollo de Mac Laurin de f?

(c) Grafica f.

(d) Prueba que $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios optativos

14. Formaliza, dale sentido preciso y demuestra la siguiente afirmación: **"El conjunto de los órdenes de infinitésimos para $x \to 0^+$ tiene una estructura de cuerpo conmutativo ordenado y NO ARQUIMEDIANO.**