Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 8

Ejercicios básicos

1. Resuelve

$$(a)\ \ \dot{x}+4x=0 \qquad (b)\ \ \dot{x}-3x=e^{2t} \qquad (c)\ \ t\dot{x}-2x=t^5,\ x(1)=1.$$

2. Resuelve

$$(a)\ \ \dot{x}=x^4\ ,\ \ x(0)=4 \qquad (b)\ \ t\ \dot{x}-x=2t^2\ x \qquad (c)\ \ \dot{x}\ sen\ t=x\ Lx\ ,\ \ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

3. Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones y la solución particular que se indica:
   (a) $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=0,\ \ x(0)=2,\ \dot{x}(0)=3.$
   (b) $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0,\ \ x(0)=2,\ \dot{x}(0)=1.$
   (c) $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0,\ \ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1.$
   (d) $\ddot{x}-9x=0,\ \ x(0)=3,\ \dot{x}(0)=15.$
   (e) $\ddot{x}-5\dot{x}=0,\ \ x(0)=2,\ \dot{x}(0)=1.$
   (f) $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0,\ \ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=1.$

Ejercicios de nivel medio

4. Resuelve:

$$(a)\ \ t\dot{x}+x-e^t=0 \qquad (b)\ \ \dot{x}-x\ tg\ t=\frac{1}{cos\ t}\ ,\ \ x(0)=0.$$

$$(c)\ \ \dot{x}=-x\ cos\ t+\frac{sen\ 2t}{2} \qquad (d)\ \ y'+2xy=-2xe^{-x^2}$$

5. Una sustancia radiactiva se desintegra con una velocidad proporcional a la cantidad de sustancia existente en cada instante. Calcula el tiempo necesario para que la masa se reduzca a la mitad.

6. Resuelve:

$$(a)\ \ x-t\ \dot{x}=1+t^2\ \dot{x} \qquad (b)\ \ (1+e^t)x\dot{x}=e^t\ ,\ \ x(0)=1. \qquad (c)\ \ \dot{x}=\frac{t^2+1}{2-x}\ ,\ \ x(-3)=4.$$

7. Se consideran las ecuaciones:

$$(1)\ \ y'' + y = A(x) \qquad\qquad (2)\ \ y'' + y'\ tg\ x = A(x) + \frac{sen^2 x}{cos\ x}$$

Se sabe que ambas ecuaciones admiten una solución común.

(a) Halla la solución común $y_1(x)$ tal que $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Halla $A(x)$.

(c) Resuelve completamente las dos ecuaciones.

8. Consideremos la ecuación diferencial

$$(E) \qquad \dot{x} = sen\ x.$$

(a) Halla la solución de (E) con condición inicial $x(0) = \pi$.

(b) Halla la solución de (E) con condición inicial $x(0) = \pi/2$.

(c) Demuestra que toda solución de (E) también es solución de la ecuación de segundo orden $\ddot{x} = sen\ x\ cos\ x$. Halla una ecuación de tercer orden que sea satisfecha por cualquier solución de (E).

9. **Reducción del orden para ecuaciones lineales**
Consideremos la ecuación lineal de segundo orden homogénea:

$$\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_2(t)x(t) = 0$$

Supongamos que conocemos una solución $\tilde{x}$ de la misma. Muestra que con el cambio de variable $x = u\ \tilde{x}$ la ecuación dada se reduce a una lineal de orden 1 en $\dot{u}$.
Encuentra la solución general de $t\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = 0\ (t > 0)$ sabiendo que $\tilde{x}(t) = \frac{sen\ t}{t}$ es solución.

10. **Ecuaciones homogéneas**
Muestra que mediante el cambio de variables $x = ut$ la ecuación homogénea $\dot{x} = f(x/t)$ (f no es la identidad), se transforma en la ecuación de variables separables:

$$\dot{u} = \frac{f(u) - u}{t}$$

Resuelve:

$$\dot{x} = \frac{t - x}{t + x} \qquad\qquad \dot{x} = \frac{x + t}{t} \quad x(1) = 0.$$

11. **Ecuación de Ricatti**
Consideremos la ecuación $\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$ en donde a, b, c son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Supongamos que x_p es una solución (particular) de la ecuación. Muestra que, mediante el cambio de variable $x = x_p + \frac{1}{u}$ la ecuación se transforma en

$$\dot{u} + [b + 2\ c\ x_p]\ u = -c$$

Utiliza este método para resolver:

(a) $\dot{x} = 1 + t^2 - 2tx + x^2$ a partir de la solución particular $x_p(t) = t$.

(b) $\dot{x} = 1 - t^2 + x^2$ sabiendo que tiene una solución polinómica.

12. Consideremos la ecuación $t^2\ddot{x} - 2x = t^3e^t \quad (t > 0)$. Encuentra la solución general de la homogénea buscando soluciones de la forma $x(t) = t^\alpha$. Encuentra la solución general de la ecuación original.

13. En 1760 Daniel Bernoulli estudió los efectos de la viruela. En el modelo para la epidemia de dicha enfermedad, Bernoulli empleó la ecuación diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = -pS + \left(\frac{S}{N}\right)\frac{dN}{dt} + \frac{pS^2}{mN}$$

donde $N(t)$ es el número de personas vivas a la edad t, $S(t)$ el número de personas propensas a contraer la viruela a la edad t, p la probabilidad de que un individuo propenso contraiga la enfermedad y $1/m$ la proporción de quienes mueren de viruela.

   (a) Si $y(t) = N(t)/S(t)$ escribir la ecuación diferencial que verifica $y(t)$. Resolverla y expresar $N(t)$ en función de $S(t)$.

   (b) Sean $N_0 = N(0)$ el número de niños recién nacidos y $S_0 = S(0)$ el número de recién nacidos propensos. Supóngase que todo recién nacido que contrae la enfermedad muere. Expresar S_0 y la "constante arbitraria" en función de N_0, m y p.

   (c) Si $N(t)$ depende linealmente de $S(t)$ ($N(t) = aS(t) + b$), ¿cómo es el comportamiento de $N(t)$? Idem si $N(t) = \frac{k}{S(t)}$

Ejercicios optativos

14. Encuentra una curva en el plano xOy que pase por el punto $(a, 0)$ y tal que el segmento de tangente entre el punto de tangencia y el eje Oy tenga longitud constante a. (Esta curva se denomina "tractriz").

15. Las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada por $E(x, y, c) = 0$, donde c es un parámetro, son las curvas que cortan a cada curva de la familia en ángulo recto. Si $F(x, y, y') = 0$ es la ecuación diferencial de la familia dada, $F(x, y, -1/y') = 0$ lo es de la familia ortogonal. Hallar las familias ortogonales a las siguientes familias de curvas:

   (a) Elipses $x^2 + 2y^2 = a^2$ (parábolas $cx^2 = y$).

   (b) Hipérbolas $xy = c$ (hipérbolas $x^2 - y^2 = c$).

   (c) $x^2 + y^2 = 2ax$ ($x^2 + y^2 - 2cy = 0$) identificar las curvas.

   (d) Exponenciales $y = ce^x$ ($2x - y^2 = c$).

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que si la ecuación $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ no tiene soluciones constantes entonces tampoco tiene soluciones periódicas.