Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 7

Ejercicios básicos

1. Clasifica (sin calcular) las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^t}\, dt \qquad \int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{2-t}}\, dt \qquad \int_0^{1} \frac{Lt}{t}\, dt$$

$$\int_{-1}^{3} \frac{9}{x^2+x-2}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, dt$$

2. Clasifica las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2+4t-7}{t^4+1}\, dt \qquad \int_2^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+t-2}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{2t^3-4t}{(t^2+1)^2}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+1}\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{sen^2 t}{t^2+1}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{4}{x^2-1}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{1+xe^{2x}}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} t^4\, e^{-t}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\, e^{-2t}}{t^4+1}\, dt$$

Ejercicios de nivel medio

3. Clasifica las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{sen^2 t}{t^2+1}\, dt \qquad \int_{-\infty}^{-1} \frac{x+2}{x(x+1)}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} t^4\, e^{-t}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t\, e^{-2t}}{t^4+1}\, dt$$

$$\int_0^{2} \frac{1}{(t-1)^{1/3}}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2}\, dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-cosx}{(1+x)^2}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} e^{-2x}\, cos^2 x\, dx$$

4. Sea f la función dada por:

$$f(t) = \frac{1}{t\ (1+L^2 t)}$$

Clasifica $\int_0^{+\infty} f$ y, si corresponde, calcula su valor.

5. Sea $I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{L^n t}{t^{1+\alpha}}\, dt$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$. Comprueba que esta integral converge. Encuentra una relación de recurrencia entre $I_n(\alpha)$ e $I_{n-1}(\alpha)$. Prueba que $I_n(\alpha) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

6. Demuestra que $\int_1^{+\infty} \frac{1-2sen\ t}{t^3}\ dt$ es convergente y que $-1/2 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1-2sen\ t}{t^3}\ dt \leq 3/2$.

7. (a) Prueba que $\int_\pi^{+\infty} \frac{sen\ t}{t\ (Lt)^2}\ dt$ converge.
   (b) Prueba que: $\int_\pi^{+\infty} \frac{cos\ t}{Lt}\ dt \ = \ \int_\pi^{+\infty} \frac{sen\ t}{t\ (Lt)^2}\ dt$
   (c) Deduce que: $\left|\int_\pi^{+\infty} \frac{cos\ t}{Lt}\ dt\right| \ \leq \ \frac{1}{L\pi}$

8. Prueba las siguientes desigualdades:

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{sen^3 x}{(x+1)^2}\ dx\right| \ \leq \ 1. \qquad \left|\int_0^{+\infty} (-5+senx)\ e^{-3x}\ dx\right| \ \leq \ 2. \qquad \left|\int_{-\infty}^0 senx\ e^x\ dx\right| \leq 1.$$

9. Sea

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos^n x\, dx.$$

   (a) Probar que I_n converge para todo $n \geq 1$.
   (b) Probar que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   (c) Probar que para todo $n \geq 2$ se cumple

$$I_n = \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{2n} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos^{n-2} x\, dx.$$

10. Sea $f : R \longrightarrow R$ una función con derivada continua tal que:
    (i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ii) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f$ converge absolutamente. (iii) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \mid f \mid = 7$
    (a) Prueba que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)\ sent\ dt$ *C.A. y que* $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t)\ sent\ dt\right| \leq 7$
    (b) Prueba que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f'(t)\ cost\ dt = f(x)\ cosx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\ sent\ dt \qquad \forall x \in R.$
    (c) Deduce que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f'(t)\ cost\ dt$ *converge y que* $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f'(t)\ cost\ dt\right| \leq 7$

<u>Ejercicios complementarios</u>

11. **Función Beta de Euler.**
    Para $p > 0$ y $q > 0$ consideremos la integral:

$$B(p,q) \ = \ \int_0^1 t^{p-1}\ (1-t)^{q-1}\ dt$$

   (a) Demuestra que, efectivamente, la integral anterior converge para $p > 0$ y $q > 0$. (Observa que es impropia en "0" y en "1").
   (b) Integrando por partes prueba que:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}\ B(p+1,q-1) = \frac{p-1}{q}\ B(p-1,q+1), \qquad p > 1,\ q > 1.$$

   (c) Deduce que:

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!\ (n-1)!}{(m+n-1)!}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, m > 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > 1.$$

12. Sean f y g dos funciones con derivada continua en $[0,+\infty)$ tales que: g es positiva en $[0,+\infty)$, $\int_0^{+\infty} g$ es convergente, f es creciente en $[0,+\infty)$ y $f(0)=1$.

   (a) Clasifica $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{f(t)}\, dt$

   (b) Si $G(x)=\int_0^x g$ clasifica $\int_0^{+\infty} \frac{G(t)\ f'(t)}{[f(t)]^2}\, dt$

   (c) Verifica que $f(x)=x+1$ y $g(x)=1/(x+2)^2$ están en las condiciones de las partes anteriores y calcula en este caso $\int_0^{+\infty} \frac{G\ f'}{f^2}$

13. Clasifica: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ en donde:

$$f(t)=\begin{cases} e^t, & \text{si } t\leq 0. \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & \text{si } t>0. \end{cases}$$

14. En cada uno de los siguientes casos determina la constante λ para que $\int_{-\infty}^{+\infty} f\ =1$ y encuentra $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, para cada $x\in R$. Grafica f y F.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & si\ x\in[a,b]. \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 0, & si\ x\leq 0. \\ \lambda e^{-5x}, & si\ x>0. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & si\ x\leq 0. \\ \lambda\ x\ e^{-x}, & si\ x>0. \end{cases}$$

15. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(t)=\begin{cases} \frac{1}{1+t^2}, & si\ t\leq 0. \\ \\ \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}, & si\ t>0. \end{cases}$$

Calcula $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ para cada $x\in\mathbb{R}$. Compara las gráficas de f y F. Calcula $\int_{-\infty}^{+\infty} f$

Ejercicios optativos

16. (a) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{cos\ 2t}{t}$ converge. (integrar por partes).

   (b) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{sen^2 t}{t}$ no converge. $\left(\text{recuerda que } sen^2 t=\frac{1-cos\ 2t}{2}\right)$.

   (c) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{sen\ t}{\sqrt{t}}$ *converge*

   (d) Prueba que $\int_1^{+\infty} \frac{sen\ t}{\sqrt{t}+sen\ t}$ no converge. (Te sugerimos escribir $\frac{sen\ t}{\sqrt{t}+sen\ t}=\frac{sen\ t}{\sqrt{t}+sen\ t}-\frac{sen\ t}{\sqrt{t}}+\frac{sen\ t}{\sqrt{t}}$ y observar que $\sqrt{t}+sen\ t\leq\sqrt{t}+1$.)

   (e) Muestra que $\lim_{t\to+\infty}\left((\sqrt{t}+sen\ t)/\sqrt{t}\right)=1$ y que, sin embargo

$$\int_1^{+\infty} \frac{sen\ t}{\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \frac{sen\ t}{\sqrt{t}+sen\ t} \quad \text{no tienen el mismo comportamiento.}$$

   ¿Qué comentario te merece este resultado?