Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 6

Ejercicios básicos

1. Calcula:

$$a)\ \int_{-1}^{0} \frac{3x+2}{x^2-3x+2}\,dx \qquad b)\ \int_{4}^{2} \frac{2x^2+x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} \qquad c)\ \int_{2}^{3} \frac{3x^3-3x+1}{x^2-1}\,dx$$

2. Encuentra todas las primitivas de las siguientes funciones:

$$\frac{3x^3-10x^2-x}{\left(x^2-1\right)^2} \qquad \frac{1-5x}{x^3-x} \qquad \frac{x^2}{x^2+4x+3}$$

Ejercicios de nivel medio

3. Calcula:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} \qquad \int \frac{1}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)} \qquad \int \frac{x}{x^2-4x+8}$$

4. (a) Integrando por partes demuestra la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m} = \frac{1}{(1-m)\Delta}\left(\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^{m-1}} + (4m-6)\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^{m-1}}\right)$$

en donde $\Delta = b^2-4c$.

(b) Encuentra las primitivas de las siguientes funciones:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} \qquad \frac{1}{(x^2+x+3)^3} \qquad \frac{2x^4+3x^3+2x^2+3x-1}{(x^2+x+1)^2(x-1)}$$

5. Calcula:

$$\int cos^7\ x\ dx \qquad \int \frac{dx}{sen\ x + cos\ x} \qquad \int \frac{dx}{sen\ x}$$

6. Calcula

$$\int \frac{dx}{cos\ x} \qquad \int \frac{sen\ x}{1+sen\ x+cos\ x}\,dx \qquad \int sen^4\ x\ dx \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{x^6+x^5+10x^4+2x^3+32x^2+x+32}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}\,dx \qquad \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} \quad (x = sh\ t)$$

7. Encuentra $c > 0$ para que el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = cx^3$ tenga área 2/3.

8. En cada uno de los siguientes casos calcula el área de la región indicada:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} y < x+3 \\ y > x^2+1 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} y > x^2-2x \\ y < -x^2+2x \end{array} \right.$$

9. Sean $f : f(x) = x\, e^{x^2}$ y $g : g(x) = e(2-x)$. Calcula el área de la región $R(f, g, [0, 2])$ observando que $f(1) = g(1)$.

10. Calcula el área encerrada por una elipse.

11. En cada uno de los siguientes casos calcula el área "comprendida" entre las curvas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x+3 \\ y = \frac{x^2}{2}+1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = x+1 \\ y^2 = 5x \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 4x \\ y^2 = \frac{4}{27}(x-2)^3 \end{array} \right.$$

12. El segmento $[0, L]$ tiene una densidad de masa dada por $\rho(x) = exp(x^2)$. Encuentra el baricentro de esta barra.

13. Calcula la longitud del arco AB para las siguientes curvas:

    (a) $y = 5 - \sqrt{x^3}$, $A = (1, 4)$, $B = (4, -3)$.

    (b) $y = 1 + 6\sqrt[3]{x^2}$, $A = (-1, 7)$, $B = (-8, 25)$.

    (c) $y = x^3/12 + 1/x$, $A = (1, 13/12)$, $B = (2, 7/6)$.

14. Consideremos una función real y positiva $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$, con $a > 0$. Sea V_{Oy} el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje $0y$ la región encerrada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ y el gráfico de la función $y = f(x)$, es decir, la región $\{(x, y) \colon a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$. Demuestra la fórmula

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

15. Considera una recta y un círculo (de radio r) coplanares. Sea A la distancia de la recta al centro del círculo, y supongamos, que la recta y el círculo no se cortan, es decir, que $a > r$. Llamamos "toro" al sólido de revolución que se genera, cuando el círculo gira alrededor de la recta. Calcula el volumen del toro.

16. Calcula el volumen del sólido resultante al girar la región que se indica:

    (a) Región acotada por las gráficas de $y = x^4$ e $y = 1$ girando alrededor de la recta $y = 1$.

    (b) Región acotada por las gráficas de $y = 1 - x^2$ y $x - y = 1$ girando alrededor de la recta $y = 3$.

Ejercicios optativos

17. *Área de una superficie de revolución.* (a) Demuestra que la superficie generada por una curva de ecuación $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función con derivada continua en un intervalo $[a, b]$, al girar alrededor del eje Ox, se calcula mediante la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

(b) Calcula la superficie de una esfera de radio R.

18. *Teorema de Guldin* (a) Demuestra el siguiente teorema: Sea A una región del plano, de la forma $\{(x, y) \colon a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, donde $f(x)$ es una función continua y positiva, y $a > 0$. El volumen del cuerpo de revolución engendrado por A al girar alrededor de Oy es igual al producto del área de la región A, por la distancia que ha recorrido su centro de gravedad.

(b) Recalcular el volumen del toro, del ejercicio 15.