Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 5

Ejercicios básicos

1. Calcula las siguientes integrales:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\ e^{cosx}\ dx \qquad b) \int_{-1}^{0} x^2\ \sqrt{4+3x^3}\ dx \qquad c) \int_1^e \frac{L^3 x}{x}\ dx$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x)\ dx \qquad e) \int_0^1 \frac{Arctg\, x}{x^2+1} dx \qquad f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x\ dx$$

2. Sabiendo que f es continua en $[0,4]$ y que $\int_0^4 f\ = 10$, calcula $\int_0^2 f\left(x^2\right)\ 2x\ dx$.

3. En cada uno de los casos que se presentan a continuación se ha aplicado el teorema de sustitución. Comprueba que lo que se ha hecho es correcto, identificando las funciones f y g del enunciado del teorema, y verificando el cumplimiento de las hipótesis del mismo.

$$\int_1^2 x^2\ e^{9-x^3}\ dx = -\frac{1}{3}\int_8^1 e^u\ du \qquad \int_0^{\frac{3\pi}{2}} sen^3 x\ cosx\ dx = -\int_{-1}^{0} u^3\ du$$

Ejercicios de nivel medio

4. Calcula las siguientes integrales:

$$a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{senx}\ dx \qquad b) \int_0^1 x^2\ e^{x^3}\ dx \qquad c) \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ Lx}\ dx$$

$$d) \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx \qquad e) \int_1^e \frac{Lx}{Lx+1}\ \frac{1}{x}\ dx \qquad f) \int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+1\right)^3}\ dx$$

5. Calcula las siguientes integrales:

$$a) \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{u}}\ du \qquad b) \int_0^1 L(1+\sqrt{u})\ du$$

6. Consideremos la función:

$$g : g(x) = \int_1^x \frac{Lt}{1+t^2}\ dt\ , \qquad x>0$$

Efectuando la sustitución $t=\frac{1}{z}$ demuestra que $g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que si f es impar (esto quiere decir que $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$), entonces $\int_{-a}^{a} f = 0$, cualquiera que sea el número a. Si f es par (esto quiere decir que $f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$), demuestra que $\int_{-a}^{a} f = 2\ \int_0^a f$. En ambos casos te sugerimos hacer la sustitución $u = -x$.

8. Calcula las siguientes integrales (n y m son naturales mayores o iguales que 1)

   $a)\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\ cos(mx)\ dx \qquad b)\ \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\ sen(mx)\ dx \qquad c)\ \int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)\ cos(mx)\ dx$

   Sugerencia: Para a) observa que el integrando es una función impar. Para b) y c) puede resultarte útil usar las siguientes fórmulas trigonométricas:
   $sen(A)\ sen(B) = \frac{1}{2}(cos(B-A) - cos(A+B)) \qquad cos(A)\ cos(B) = \frac{1}{2}(cos(B-A) + cos(A+B))$

9. (a) Sea $\Phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Haciendo la sustitución $u = \pi - x$ demuestra que

   $$\int_0^{\pi} x\ \Phi(sen\ x)\ dx \ = \ \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \Phi(sen\ x)\ dx$$

   (b) Calcula:

   $$\int_0^{\pi} x\ \frac{sen\ x}{1 + cos^2 x}\ dx \qquad \int_0^{\pi} x\ sen^5 x\ cos^4 x\ dx$$

10. (a) Prueba que:

    $$\int_0^1 x^p\ (1-x)^q\ dx \ = \ \int_0^1 x^q\ (1-x)^p\ dx \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\ t)^{2p+1}\ (cos\ t)^{2q+1}\ dt$$

    (b) Calcula:

    $$\int_0^1 x^2\ (1-x)^{20}\ dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\ t)^5\ (cos\ t)^{41}\ dt$$

11. Calcula las siguientes integrales efectuando las sustituciones que se indican:

    $$a)\ \int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx, \quad x = t^2 + 1 \qquad b)\ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad x = sen^2 t$$

    $$c)\ \int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\ dx, \quad x = 4sen^2 t - 2. \qquad d)\ \int_{-1}^{0} x^2\ \sqrt{4+3x}\ dx, \quad x = \frac{1}{3}(t^2 - 4)$$

12. Sea f una función invertible con derivada continua en $[a,b]$.

    (a) Demuestra (e interpreta geométricamente) la igualdad:

    $$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} \ + \ \int_a^b f \ = \ b\ f(b) - a\ f(a)$$

(b) Vuelve a deducir la igualdad anterior derivando la función

$$\varphi(x) \;=\; \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1} \;+\; \int_a^x f \;-\; x\, f(x)$$

Ejercicios optativos

13. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\ x)^n \ dx \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\ x)^n \ dx$$

(a) Prueba que $I_n = J_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(b) Prueba que $n\, I_n = (n-1)\, I_{n-2}, \ \forall\, n \geq 2$. Encuentra fórmulas para I_{2n} e I_{2n-1}.

(c) Prueba que $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$ y deduce que:

$$\lim \left(\frac{!!(2n)}{!!(2n-1)} \right)^2 \frac{1}{n} \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad \text{(fórmula de Wallis)}$$