

## Práctico 4

### Ejercicios básicos

1. Calcula las siguientes integrales:

$$\int_1^2 \left( 3x^2 - 4x + 7 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx, \quad \int_1^4 \frac{6x - 5\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^1 \left( 2x - \frac{1}{x+1} \right) dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + tg^2(x) - 2\cos x) dx, \quad \int_{-2}^1 e^{-|x|} dx, \quad \int_1^2 \left( \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

2. Calcula  $\int_0^3 (|2x-1| + |2x-4|) dx$

3. Si  $f(t) = 1 - 3t$  encuentra una fórmula explícita para  $F(x) = \int_0^x f$ . Grafica  $f$  y  $F$  en  $[-2, 3]$ .

4. Aplica el método de integración por partes para calcular:

$$a) \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x dx \quad b) \int_1^2 x^2 Lx dx$$

### Ejercicios de nivel medio

5. Calcula:

$$a) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \quad b) \int_1^x t^2 (Lt)^3 dt, (x > 0).$$

$$c) \int_1^x Lt dt, (x > 0). \quad d) \int_0^x e^{at} \operatorname{sen}(bt) dt$$

6. Encuentra una fórmula de recurrencia para la siguiente sucesión y verifícala.

$$I_n(x) = \int_1^x (Lt)^n dt, \quad x > 0, n \in N, n \geq 0.$$

7. Para cada  $n \in N$ ,  $n \geq 0$  consideremos:

$$I_n(x) = \int_1^x \frac{(Lt)^n}{t^2} dt \quad (x > 1).$$

(a) Calcula  $I_0(x)$ .

- (b) Halla una relación de recurrencia entre  $I_n(x)$  e  $I_{n-1}(x)$  para  $n \geq 1$ .  
 (c) Calcula  $I_3(x)$ .

8. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$  consideremos:

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

- (a) Calcula  $I_0$ .  
 (b) Utilizando integración por partes demuestra que  $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ ,  $\forall n \geq 1$ .  
 (c) Calcula  $I_4$ .
9. Sea  $f$  una función con derivada segunda continua en  $[0, \pi]$  que cumple  $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \cos x dx = 0$ . Demuestra que  $f'(\pi) = -f'(0)$ .
10. Sea  $f$  una función con derivada continua en  $[0, 1]$ , tal que  $f(1) = 1$ ,  $f(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$ ,  $f'(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$  que verifica:

$$\int_0^x t f'(t) dt \geq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (a) Demuestra que, para cada  $x \in [0, 1]$  se cumple:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \leq \min\left\{x, 1 - \frac{x^2}{2}\right\}$$

- (b) ¿Existe alguna función  $f$  que cumpla con las condiciones del enunciado?

11. Halla una fórmula de recurrencia para cada una de las siguientes sucesiones. En cada caso se te pide que la verifiques y que calcules  $I_3(x)$ :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{sen} t dt \quad I_n(x) = \int_0^x \operatorname{sen}^n t dt$$

12. Calcula:  $\int_1^x \operatorname{sen}(Lt) dt$ ,  $x > 0$ .

### Ejercicios optativos

13. Sea  $f$  una función acotada en  $[a, b]$  y continua salvo en un punto  $c \in [a, b]$ . Demuestra que  $f$  es integrable Riemann en  $[a, b]$ .
14. Encuentra una función NO integrable Riemann que tenga primitiva. (Se te sugiere buscar una función derivable en  $[-1, 1]$  cuya derivada no esté acotada).