Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 3

Ejercicios básicos

1. En cada uno de los siguientes casos se define una función f y se da el valor de la $\int_a^b f$. Calcula el o los números "c" del Teorema del Valor Medio.

   (a) $f(x) = x^2, \qquad \int_0^1 f = \frac{1}{3}$
   (b) $f(x) = x^2, \qquad \int_{-2}^2 f = \frac{16}{3}$
   (c) $f(x) = sen\ x, \qquad \int_0^\pi f = 2$
   (d) $f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \leq 1 \\ 2-x, & si\ x > 1 \end{cases} \qquad \int_0^2 f = 1.$

2. Sea f una función continua en $[2,8]$ tal que $\int_2^8 f = 20$ y $\int_8^4 f = 12$. Calcula $\int_2^4 f$ y demuestra que existe un $c \in [2,4]$ tal que $f(c) = 16$.

3. (a) Las funciones $f : f(x) = 2x$ y $g : g(x) = 3x^2$ son tales que:

$$\int_0^1 f \ = \ \int_0^1 g \ = \ 1 \qquad y \qquad \int_0^1 (f-g) \ = \ 0$$

   Halla el punto "c" del Teorema del Valor Medio para cada una de las tres integrales, verifica que dichos puntos son distintos dos a dos, y realiza la correspondiente interpretación gráfica.

   (b) Encuentra un ejemplo de dos funciones f y g diferentes tales que $\int_0^1 f = \int_0^1 g$ y que los puntos del Teorema del Valor Medio para $\int_0^1 f$, $\int_0^1 g$ y $\int_0^1 (f-g)$ sean coincidentes.

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{3 + sen(t)}\ dt, \qquad G(x) = \int_0^{x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{2+t}\ dt,$$

$$H(x) = \int_{2x+5}^3 e^{1-t}\ sen(t)\ dt \qquad J(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1+t^4}\ dt$$

5. En cada uno de los siguientes casos, encuentra la función continua f, el número real λ y el valor de la $\int_0^1 f$ sabiendo que se cumple la igualdad indicada:

   (a) $\int_0^x f \ = \lambda - e^{-x^2}\ , \quad \forall x \in R.$
   (b) $\int_1^x f \ = L(x^2+2x+2) - \lambda\ , \quad \forall x \in R.$
   (c) $\int_\lambda^x f \ = (x-1)^4\ , \quad \forall x \in R.$

Ejercicios de nivel medio

6. En las mismas hipótesis que en el ejercicio 2, demuestra que hay un $x_0 \in [2,8]$ tal que $f(x_0) = 1$.

7. Sean F y G dadas por:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + Arctg\, x\right) \qquad\qquad G(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt$$

Demuestra que $F(x) = G(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

8. Demuestra que cualquiera que sea $x > 0$ vale:

$$\int_1^x \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

9. En las siguientes partes se te sugiere usar convenientemente el teorema del valor medio para integrales.

   (a) Sea f una función continua en un intervalo abierto I y sea x_0 un punto de I. Demuestra que $\lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = 0$.

   (b) Demuestra que para cada $p > 0$ se cumple que $\lim_{n\longrightarrow +\infty} \int_n^{n+p} \frac{sen\, x}{x}\, dx = 0$.

   (c) Demuestra que $\lim_{x\longrightarrow +\infty} \int_x^{x^3} e^{-t^2}\, dt = 0$.

10. Consideremos la función f dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Halla el máximo y el mínimo de f en $[0,1]$. Si se sabe que $\int_0^1 x^8\, dx = \frac{1}{9}$, deduce que:

$$\frac{1}{9\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^8}{\sqrt{1+x}}\, dx \leq \frac{1}{9}$$

11. Halla la función continua f, el número real λ y la $\int_0^1 f$ sabiendo que se cumple la igualdad indicada:

$$\int_0^x f = \lambda - x|x|\ , \qquad \forall x \in R.$$

12. Sean F y G dadas por:

$$F(x) = \int_0^x Arctg(t^2)\, dt \qquad\qquad G(x) = \int_0^x Arctg\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)\, dt$$

Halla F'' y G'' y encuentra la relación que existe entre $F(x)$ y $G(x)$.

13. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x\ sen\, \frac{\pi}{x}, & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prueba que $-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f \leq \frac{1}{2}$.

14. Demuestra el **segundo teorema del valor medio** que puede enunciarse de la siguiente manera: Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ tal que g es no negativa en $[a,b]$ y $\int_a^b g \neq 0$. Entonces existe algún punto $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f.g = f(c) \int_a^b g$.

15. Se consideran las siguientes funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ como sigue:

$$F : F(x) = Arctg(x) - \frac{x}{x^2+1} \qquad\qquad G : G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dt$$

(a) Calcula $F'(x)$, $G'(x)$, $F(1)$, $G(1)$ y deduce la relación entre F y G en $[0, +\infty)$. Calcula $G(0)$.

(b) Halla la relación que existe entre F y G en $(-\infty, 0)$.