Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 2

Ejercicios básicos

1. Sea $f : [-1, 2] \to R$ tal que $f(x) = 1 + x + L|x + 2|$.
   (a) Halla $f([-1, 2])$ justificando la respuesta.
   (b) Prueba que $f : [-1, 2] \to f([-1, 2])$ es invertible.
   (c) Calcula $(f^{-1})'(1 + L2)$.
2. Aplicando la fórmula de la derivada de la función inversa deduce que la derivada de $\sqrt{x}$ es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.
3. Demuestra la siguiente identidad:
$$Arctg(x) + Arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si, } x > 0. \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si, } x < 0. \end{cases}$$

Ejercicios de nivel medio

4. Consideremos las funciones:
$$f : f(x) = -2\ Arctg\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \qquad g : g(x) = Arcsen(2x - 1)$$
   (a) Halla los dominios de f y g.
   (b) Halla $f'(x)$ y $g'(x)$. ¿Qué relación hay entre f y g ?
   (c) Grafica f y g.
5. Discute la concavidad de f^{-1} según el crecimiento y la concavidad de f. Hacerlo geométricamente y analíticamente.
6. Consideremos las funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ por:
$$sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x}$$
   Estas funciones se llaman “seno hiperbólico”, “coseno hiperbólico” y “tangente hiperbólica” respectivamente. En este ejercicio te pedimos que pruebes las siguientes relaciones y afirmaciones:
   (a) $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, $sh'(x) = ch(x)$, $ch'(x) = sh(x)$, $th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Las funciones $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad ch : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ $\quad th : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ tienen sendas funciones inversas que se simbolizan $Argsh$, $Argch$, y $Argth$ respectivamente.

(c) $Argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad Argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\forall x \in (1, +\infty)$, $\quad Argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $\forall x \in (-1, 1)$.

(d) Grafica las funciones hiperbólicas y sus inversas.

<u>**Ejercicios optativos**</u>

7. (a) Prueba que si g tiene derivada continua en a y $g'(a) \neq 0$ entonces g es inyectiva en algún entorno de a.

   (b) Consideremos la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \; sen\left(\frac{1}{x}\right) \;, & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Prueba que $f'(0) = 1/2$ y que, sin embargo, f no es inyectiva en ningún intervalo que contenga al 0.