Universidad de la República
Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

# Práctico 12

## Ejercicios básicos

1. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ de la cual se sabe que

$$A_n = a_1 + a_2 + \ .\ .\ .\ . + a_n \ = \ \frac{2n+1}{n+3} \qquad (n \geq 1).$$

   (a) Clasifica la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en caso de convergencia, calcula su suma.
   (b) Calcula $a_1$ y determina $a_n$ para cada $n \geq 2$.

2. En cada uno de los siguientes casos clasifica $\sum a_n$

$$a_n = cos\,\frac{1}{n} \qquad a_n = \frac{1}{2^n} + e^n \qquad a_n = \frac{2n+1}{n^2(3n+5)} \qquad a_n = \frac{n^3-1}{3n^3+2n^2-4n-9}$$

3. Clasifica las siguientes series y, en caso de convergencia, encuentra la suma de las mismas.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

## Ejercicios de nivel medio

4. Clasifica las siguientes series y, en caso de convergencia, encuentra la suma de las mismas.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{3^{n-1}}$$

5. En cada uno de los siguientes casos se te da una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ y se te pide:
   (a) Encontrar una expresión para $A_n = a_1 + a_2 + \ .\ .\ .\ . + a_n$
   (b) Calcular $\lim(A_n)$ (en caso que exista).
   (c) Clasificar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en caso de convergencia, calcular su suma.

$$a_n = n \qquad a_n = \int_n^{n+1} e^{-x} \qquad a_n = L\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

6. Utilizando el "criterio integral" demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ converge y que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \ \leq 2e^{-1}$.

7. Sean $(a_n)$, $(b_n)$ y $(c_n)$ sucesiones tales que: $0 < b_n < a_n < 1$, $\forall n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y $c_n = \frac{1-a_n}{1+b_n}$. Clasifica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-c_n)$$

8. Sabiendo que $a_n > 0$ y que $\sum a_n$ converge, clasifica las siguientes series o muestra con ejemplos que no es posible afirmar nada.

$$\sum \frac{1}{a_n} \qquad \sum a_n^2 \qquad \sum \sqrt{a_n} \qquad \sum L(1+a_n)$$

9. Sea $f$ una función de clase $C^2$ en algún entorno de $a$ y sea $y = t(x)$ la ecuación de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto $(a, f(a))$. Si $\phi(x) = f(x) - t(x)$ ¿qué se puede decir del comportamiento de la serie $\sum \phi\left(a + \frac{1}{n}\right)$?

10. En cada uno de los siguientes casos clasifica $\sum a_n$

$$a_n = L\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \qquad a_n = e^{1/n^2} - 1 \qquad a_n = \frac{(sen\ n)^2}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - cos\ \frac{1}{n}}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} - sen\ \frac{1}{n^2} \qquad a_n = \frac{1}{n} - sen\ \frac{1}{n} \qquad a_n = 1 - cos\ \frac{1}{\sqrt{n}} + L\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - sen\ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{5n+8}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \qquad a_n = n^q e^{-\gamma n} \quad (q \in \mathbb{R},\ \gamma > 0)$$

$$a_n = \frac{2^n}{n^n} \qquad a_n = \frac{2^n\ n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{3^n\ n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{n!}{(2n)!}$$

11. Prueba que las siguientes series son absolutamente convergentes y encuentra cotas (inferiores y superiores) de sus sumas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\ n}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2sen\ \frac{1}{n}}{n^3}$$

12. Clasifica las series de término general:

$$\frac{(-1)^n}{nLn} \qquad (-1)^n\ L\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (-1)^n\ \left(1 - nsen\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (-1)^n\ L\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

13. Clasifica:

$$\sum \frac{(-1)^n}{Ln} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{Ln + (-1)^n}$$

14. **Criterio de Raabe.** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones positivas. Sea

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1}a_{n+1}}{a_n}.$$

(a) Prueba que si existe $r > 0$ tal que $c_n \geq r$ para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ converge. (*Sugerencia:* prueba que $\sum_{k=N}^n a_k \leq a_N b_N / r$.)

(b) Prueba que si $c_n \leq 0$ para $n \geq N$ y $\sum 1/b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

(c) Aplica (a) y (b) con $b_n = n - 1$ para deducir el criterio de Raabe:

i. Si existen $r > 0$ y $N \geq 1$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n}$$

para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ converge.

ii. Si $a_{n+1}/a_n \geq 1 - 1/n$ para todo $n \geq N$, entonces $\sum a_n$ diverge.

iii. Encuentra una "versión" del criterio de Raabe con "paso al límite". Clasifica

$$\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad \sum \frac{e^n \, n!}{n^n}$$

## Ejercicios optativos

15. Sean $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ sucesiones de reales y $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$.

(a) Prueba que $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}$. (fórmula de Abel).

(b) Prueba el criterio de Dirichlet: si $A_n$ es acotada y $b_n$ decrece a 0, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

(c) Prueba el criterio de Abel: si $\sum a_n$ converge y $b_n$ es monótona convergente, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

(d) Clasifica $\sum \frac{sen(na)}{n}$ y $\sum \frac{cos(na)}{n}$ $\;a \in R$ (sugerencia: utilizar que $e^{x+iy} = e^x(cosy + iseny)$ y relacionar $sen(na)$ y $cos(na)$ con $e^{ina}$ y $e^{-ina}$).

16. Clasifica $\sum \frac{(-1)^n Ln}{n^\alpha} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \quad \sum \frac{(-1)^n(n+Ln)}{n^2}$

17. **Fórmula de Stirling**. En este ejercicio se demostrará que $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}(1 + \alpha_n)$, donde $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

(a) Prueba que $\int_{k-1}^k Lxdx \leq Lk \leq \int_k^{k+1} Lxdx \;\; \forall k = 1, 2, 3..., n$ y sumando desde 1 a n, deducir que $nLn - n \leq Ln! \leq (n+1)L(n+1) - n$.

(b) Sea $d_n = Ln! - (n+\frac{1}{2})Ln + n$. Prueba que $d_n - d_{n+1} = (n+\frac{1}{2})L\frac{n+1}{n} - 1$ y usando el desarrollo de Taylor en 0 de $\frac{1}{2}L\frac{1+t}{1-t}$ deduce que $d_n$ es decreciente y que $d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$. Sea $c = \lim d_n$. Deducir que $\lim \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = e^c$. Sólo resta probar que $c = L(\sqrt{2\pi})$.

(c) Sea $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x dx$. Prueba que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ y deduce que $I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)....3.1}{2k(2k-2)....4.2}\frac{\pi}{2}$ y que $I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)....4.2}{2k+1)(2k-1)....5.3}$.

(d) Prueba que $\lim \frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} = 1$ y observando que $I_n$ es decreciente, deduce que $\lim \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1$.

(e) Deduce que $c = L(\sqrt{2\pi})$.

18. Sea $(a_n)$ la sucesión definida por

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \qquad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Prueba que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$$

converge. Denotamos su suma por $C$.

(b) Si $S_n$ es la suma parcial de $\sum(-1)^n a_n$, prueba que

$$S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

y deduce que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + o(1) \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n.$$

Esto nos dá la velocidad con que diverge la serie armónica. La constante $C$ se llama **constante de Euler**. Sus primeras cifras son $C = 0{,}577215\ldots$ y no se sabe si es racional o irracional.

19. Consideremos los siguientes conjuntos:
$V = \{$ sucesiones de números reales $\}$
$l^\infty(\mathbb{C}) = \{\ (x_n) \in V\ /\ (x_n)$ está acotada $\}$
$l^0(\mathbb{C}) = \{\ (x_n) \in V\ /\ (x_n) \longrightarrow 0\ \}$
$l^1(\mathbb{C}) = \{\ (x_n) \in V\ /\ \sum |x_n|)$ converge $\}$
$l^2(\mathbb{C}) = \{\ (x_n) \in V\ /\ \sum |x_n|^2)$ converge $\}$

(a) Demuestra que $l^1(\mathbb{C}) \subset l^2(\mathbb{C}) \subset l^0(\mathbb{C}) \subset l^\infty(\mathbb{C}) \subset V$ y que cada uno de ellos es un subespacio vectorial del "siguiente".

(b) Si $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ están en $l^2(\mathbb{C})$ definimos

$$\langle\ x\ ,\ y\ \rangle\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ \overline{y_n}$$

Demuestra que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en $l^2(\mathbb{C})$.