Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 11

Ejercicios de nivel medio

1. Demuestra que x es punto de acumulación de S si, y sólo si, existe una sucesión de puntos de S, distintos dos a dos, que converge a x.

2. (a) Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Demuestra que si $f(r) = g(r),\ \forall r \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Demuestra que:
      (i) $f(n) = f(1).n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
      (ii) $f(0) = 0$ y $f(-1) = -f(1)$.
      (iii) $f(m) = f(1).m \ \ \forall m \in \mathbb{Z}$.
      (iv) $f(r) = f(1).r \ \ \forall r \in \mathbb{Q}$.
      (v) $f(x) = f(1).x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. (a) Sea $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $g(x.y) = g(x) + g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Determina la función g.
   (b) Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continua tal que $h(x+y) = h(x).h(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Determina la función h.

4. (a) Si f y g son uniformemente continuas en I demuestra que también lo son $f+g$ y $f.g$.
   (b) Estudia la continuidad uniforme de las siguientes funciones en los dominios que se indican:
   (i) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ en $[-1, 1]$. (ii) $f(x) = Lx$ en $(0, 1)$
   (iii) $f(x) = \sqrt{x}$ en $[1, +\infty)$. (iv) $f(x) = e^x cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $(0, 1)$.
   (v) $f(x) = x^2$ en $(-a, a)$ y en $\mathbb{R}$. (vi) $f(x) = x + sen(x)$ en $\mathbb{R}$.
   (c) Demuestra que si f es uniformemente continua en $[a, c]$ y en $[c, b]$ también lo es en $[a, b]$.
   (d) Muestra que $f(x) = |sen(x)|/x$ es uniformemente continua en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$. ¿Es uniformemente continua en $(-1, 0) \cup (0, 1)$?.

5. Demuestra que si $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ entonces f está acotada y es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

6. Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **Lipschitziana** si existe $K > 0$ tal que
$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ K\ |x - y|\ , \qquad \forall\ x, y \in X.$$
   (a) Prueba que si f es Lipschitziana en X entonces es uniformemente continua en X.
   (b) El recíproco es falso (considera $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$).
   (c) Prueba que $f(x) = \sqrt{x}$ es Lipschitziana en $[1, +\infty)$ y que es uniformemente continua en $[0, +\infty)$.