Universidad de la República
Facultad de Ciencias   Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2002.

Práctico 10

Ejercicios básicos

1. Encuentra los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos.
$(-2,0] \cup (1,\sqrt{3})$ $A = \left\{\ 2 - \frac{1}{n}\ /\ n \in \mathbb{N}^*\ \right\}$ $A \cup \{2\}$ $\{\ x\ /\ x \leq \sqrt{3}\ \} \cap \mathbb{Q}$

2. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por:
$$a_0 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \geq 0.$$
Demuestra que (a_n) es monótona creciente y que está acotada superiormente. Deduce que converge y calcula su límite.

Ejercicios de nivel medio

3. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por:
$$a_0 = \sqrt{3} \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}, \quad \forall n \geq 0.$$
Demuestra que (a_n) es monótona creciente y que está acotada superiormente. Deduce que converge y calcula su límite.

4. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por:
$$x_0 = a > 0 \qquad\qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1}, \quad \forall n \geq 0.$$
   (a) Demuestra que es creciente pero que no tiene límite finito.
   (b) Calcula $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$
   (c) Para $a = 0$ encuentra una fórmula explícita para x_n.

5. Dado un número $\lambda > 0$ consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in N}$ dada por:
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\lambda}{x_n}\right), \quad \forall n \geq 0, \qquad\qquad x_0 > \sqrt{\lambda}$$
   (a) Prueba que (x_n) es decreciente y que está acotada inferiormente por $\sqrt{\lambda}$. Deduce que converge y prueba que su límite es $\sqrt{\lambda}$.
   (b) Sea $\epsilon_n = x_n - \sqrt{\lambda}$. Muestra que:
$$\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n^2}{2\ x_n} \qquad\qquad y \qquad\qquad \epsilon_{n+1} < 2\ \sqrt{\lambda}\ \left(\frac{\epsilon_1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^{2^n}, \qquad \forall n \geq 0$$

(c) Usando lo anterior y admitiendo que $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{10}$, calcula $\sqrt{3}$ con un error menor que 10^{-7}.

6. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$x_0 = 0 \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{6+x_n}{6-x_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Demuestra que converge y calcula su límite.

7. Se dice que $\big((a_n),(b_n)\big)$ es un **Par de Sucesiones Monótonas Convergentes** si se cumple que:
i) $a_n \leq b_n,\ \forall n \geq 1$. ii) (a_n) es creciente y (b_n) es decreciente. iii) $\lim \big(b_n - a_n\big) = 0$.

   (a) Prueba que si $\big((a_n),(b_n)\big)$ es un P.S.M.C. entonces existe un único número real L con $a_n \leq L \leq b_n,\ \forall n \geq 1$, tal que $(a_n) \longrightarrow L^-$ y $(b_n) \longrightarrow L^+$.

   (b) En cada uno de los siguientes casos, investiga si $\big((a_n),(b_n)\big)$ es un P.S.M.C.

$$\begin{cases} a_n = 2 - 1/n^2 \\ b_n = 2 + 1/n^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = (2n-1)/(n+2) \\ b_n = (6n+8)/(3n-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_n = (n-1)/(n+1) \\ b_n = (n+1)/(n-1) \end{cases}$$

8. Dados dos números positivos a y b con $a < b$ consideremos las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por:

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad \text{para n=0,1, \ldots} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = b, \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad \text{para n=0,1, \ldots} \end{cases}$$

Prueba que $\big((a_n),(b_n)\big)$ es un Par de Sucesiones Monótonas Convergentes.

9. Encuentra todos los puntos de aglomeración, $\limsup$ y $\liminf$ de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \qquad a_n = n^2\,[1+(-1)^n] \qquad a_n = \frac{n-1}{n+1}\, cos\, \frac{2n\pi}{3} \qquad a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\, cos\, \frac{n\pi}{2}$$

10. (a) Encuentra una sucesión que aglomere en p puntos dados.

   (b) Encuentra una sucesión que aglomere en todos los puntos del conjunto $\{\ \alpha_n\ /\ n \geq 1\ \}$.

   (c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean exactamente los puntos del conjunto $\{\ 1/n\ /\ n \in \mathbb{N}^*\ \}$?

Ejercicios optativos

11. Sea (a_n) una sucesión acotada de números positivos. Demuestra que

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(Puedes consultar la página 113 del libro "Curso de Análise Vol. I" de Elon Lages Lima).
De lo anterior resulta que si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, entonces también existe $\lim \sqrt[n]{a_n}$ y ambos límites coinciden. Encuentra un ejemplo para el cual $\lim \sqrt[n]{a_n}$ exista y sin embargo $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ no exista.

12. Consideremos las sucesiones dadas por:

$$(a_n)_{n\in N} \ / \ a_n = sen(n\alpha) \qquad (b_n)_{n\in N} \ / \ b_n = cos(n\alpha) \qquad (\alpha \neq k\pi)$$

   (a) Expresa a_{n+1} y b_{n+1} en función de a_n y b_n usando las conocidas fórmulas de seno y coseno de una suma. Demuestra que existe $\lim(a_n)$ si y sólo si existe $\lim(b_n)$.

   (b) Demuestra que ni (a_n) ni (b_n) tienen límite.

   (c) Si $\frac{\alpha}{\pi} \in Q$ prueba que ambas sucesiones aglomeran en un número finito de puntos.

   (d) Si $\frac{\alpha}{\pi} \notin Q$ prueba que ambas sucesiones aglomeran en todos los puntos del $[-1, 1]$ (?!!!). (Para esto te sugerimos que uses (y previamente pruebes) que si $\beta \notin \mathbb{Q}$ entonces el conjunto $\{ \ m\beta + n \ / \ m, n \in \mathbb{Z} \ \}$ es denso en $\mathbb{R}$.)