Examen. 23 de mayo del 2001

1. (a) Mostrar que la serie $\sum\left(\sqrt{n^{\alpha}+1}-\sqrt{n^{\alpha}}\right)$ converge para $\alpha > 2$ y diverge para $\alpha \leq 2$.
   (b) Hallar todos los reales c tal que la siguiente serie converge:
   $$\sum \frac{(n!)^{c}}{(3n)!}$$
   (c) Hallar todos los enteros $a \geq 1$ tal que la siguiente serie converge:
   $$\sum \frac{(n!)^{3}}{(an)!}$$

2. Sea $f(x) = (x+1)^{2}e^{-(x+1)}$.
   (a) Calcular $\int_{1}^{+\infty} f$.
   (b) Mostrar que f cumple las hipótesis del criterio integral en $[1, +\infty)$. Obtener cotas para la suma de
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)^{2}e^{-(n+1)}.$$
   (c) Sea $g(x) = f(x-1)$. Hallar el desarrollo de Mc Laurin de orden 6 de g. Clasificar las series:
   $$\sum g\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\Big), \quad \sum(-1)^{n}g\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

3. (a) Hallar la solución general de la ecuación:
   $$y' + \frac{y}{\tan x} = \log(\cos x), \qquad 0 < x < \pi/2.$$
   (b) Hallar la solución de
   $$y'(y+3) = y^{2} - 1$$
   con condición inicial $y(0) = 0$.
   (c) Sea f la solución hallada en la parte (b). Clasificar la integral
   $$\int_{0}^{1} \frac{f(x)}{x^{2}}\,dx.$$
   (*Sugerencia:* hallar el desarrollo de Mc Laurin de orden 1 de f.)