Centro de Matemática. 10 de marzo de 2003

Examen de Cálculo I

Ejercicio 1. (a) Si la función $h(t)$ tiene derivada segunda continua en el intervalo $[0, \infty)$, mostrar que para todo $x \geq 0$ tiene lugar la igualdad

$$\int_0^x t^2 h''(t)dt = x^2 h'(x) - 2xh(x) + 2\int_0^x h(t)dt.$$

(b) Si $h(t) = 1/(t^2 + 3t + 2)$, (i) calcular $\int_0^x t^2 h''(t)dt$, y (ii) clasificar y calcular (en caso de convergencia) $\int_0^\infty t^2 h''(t)dt$.

(c) Calcular el volumen de revolución alrededor del eje Oy generado por $h(t)$ en el intervalo $[0, 1]$.

(d) Dar una condición en función del comportamiento asintótico (límite en $+\infty$) de h y h' para que las integrales impropias $\int_0^\infty t^2 h''(t)dt$ y $\int_0^\infty h(t)dt$ tengan el mismo comportamiento. Fundamentar.

Ejercicio 2. (a) Hallar la solución general, en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} \cos t - 2\dot{x} \operatorname{sen} t = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 t,$$

sabiendo que admite alguna solución de la forma $x(t) = A \cos t$.

(b) Hallar la solución $f(t)$ tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

(c) Para la función hallada en (b), calcular

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - t - Bt^2}{t^\alpha}$$

discutiendo según B y $\alpha > 0$ reales.

Ejercicio 3. Se considera la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ donde a_n es el n-ésimo número natural que contiene alguna cifra igual a 9. Es decir

$$a_1 = 9,\ a_2 = 19, \ldots, a_9 = 89,\ a_{10} = 90,\ a_{11} = 91, \ldots, a_{19} = 99,\ a_{20} = 109,\ a_{21} = 119, \ldots$$

(a) Escribir los primeros 22 términos de la sucesión $\{a_n\}$.

(b) Demostrar que

$$\frac{1}{a_{10}} + \frac{1}{a_{11}} + \cdots + \frac{1}{a_{19}} \geq \frac{10}{99}.$$

(c) Determinar si existe algun natural N tal que

$$\frac{1}{a_N} + \frac{1}{a_{N+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{N+99}} \geq \frac{100}{999}.$$

(d) Clasificar la serie

$$\frac{10}{99} + \frac{100}{999} + \frac{1000}{9999} + \cdots$$

(e) Clasificar la serie

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots .$$