# Examen de Cálculo 1 Marzo de 2002

(I) (a) Hallar una primitiva de

$$f(t) \;=\; \frac{1}{t^2}\,\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$$

Se sugiere hacer el cambio de variable: $u = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}$.

(b) Clasificar la integral impropia $\int_1^{+\infty} f$ y, en caso de convergencia, calcular su valor.

(II) Consideremos la función $F$ dada por:

$$F(x) \;=\; \int_{x^2}^{x} e^{-t^2}\; dt \qquad .$$

(a) Calcular $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$ y $\lim_{x \longrightarrow 0} F(x)$.

(b) Hallar el desarrollo de Mac Laurin de orden 2 de $F$ y calcular $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)\; - \; x}{x^2}$

(c) Clasificar las siguientes series:

$$\sum F\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum (-1)^n\; F\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum n^{\alpha}\; e^{-n}\; F\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(III) Consideremos las ecuaciones diferenciales en $t > 0$ :

$(E)$ $\quad t^3\dot{x} + 2t^2x = 3t^3 + 1$

$(E')$ $\quad t^4\ddot{x} - 6t^2x = -6t^3 - 5$

(a) Sin resolver la ecuación $(E)$, probar que toda solución de $(E)$ también es solución de $(E')$.

(b) Hallar la solución general de $(E)$.

(c) Hallar la solución general de la ecuación homogénea $t^4\ddot{x} - 6t^2x = 0$ buscando soluciones de la forma $x(t) = t^{\alpha}$.

(d) Hallar la solución general de $(E')$.