Examen. 6 de marzo del 2001

1. (a) Calcular la integral:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{5 + 4\cos x}\, dx.$$

   (b) Hallar una primitiva de la función

$$f(x) = \frac{\mathrm{L}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x}.$$

2. Consideremos la ecuación

$$(E) \qquad t^2\, \ddot{x} + t\, \dot{x} + \omega^2\, x = 0$$

con $t > 0$ y $\omega > 0$.

   (a) Mostrar que mediante el cambio de variable $u = \mathrm{L}\, t$ la ecuación (E) se transforma en una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes.

   (b) Hallar la solución general de (E). Hallar todas las soluciones que cumplan $x(1) = 0$.

   (c) Hallar todos los valores de ω para los cuales (E) admite soluciones no triviales que se anulen en 1 y e.

3. Consideramos la función

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{t}.$$

   (a) Clasificar las integrales $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ e $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\, dt$.

   (b) Sea $\varphi(x) = \int_1^x f(t)\, dt$. Probar que φ es solución de

$$\begin{cases} y'' = -\frac{x+1}{x} y' \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

   ¿Es la única? En caso negativo, hallar otras dos.

   (c) Clasificar las series:

      i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$

      ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$

      iii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \varphi\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)$