Centro de Matemática. 4 de agosto de 2003

Examen de Cálculo I

Ejercicio 1. Consideremos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = e^x \log\bigl(e^{2x} + 5e^x + 6\bigr).$$

Clasificar, y calcular en caso de convergencia, las siguientes integrales impropias:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} f(x)dx, \quad \text{(b)} \int_{-\infty}^{0} f(x)dx, \quad \text{(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad \text{(d)} \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{f(x)}{x}dx,$$

Ejercicio 2.

(a) Probar que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$ converge, si $a > 0$, y calcular su valor.

(b) Clasificar las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh} x}, \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\log n}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$$

(c) Hallar el polinomio de Mac Laurin de $\operatorname{sh} x(1 - \cos x)$ hasta el término de grado 4.

(d) Clasificar las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ejercicio 3. Se consideran las sucesiones (a_n) y (b_n), $n \geq 1$, dadas por

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \qquad b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

(a) Demostrar que (a_n) es monótona creciente, y (b_n) monótona decreciente.

(b) Demostrar que $a_n \leq b_n$, y que $\lim_{n\to\infty}\bigl(b_n - a_n\bigr) = 0$.

(c) Demostrar que existe $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, y que se verifica $\frac{1}{2} < L < 1$.