Centro de Matemática. 24 de julio de 2002

Examen de Cálculo I

Ejercicio 1. Consideremos la función f dada por:

$$f(t) \;=\; \frac{t-4}{t\,(t^2+4)}$$

(a) Para cada $x > 0$ calcula $\int_1^x f(t)\,dt$.

(b) Clasifica $\int_1^{+\infty} f$ y, en caso de convergencia, calcula su valor.

(c) Clasifica $\int_0^{+\infty} f$ y, en caso de convergencia, calcula su valor.

(d) Clasifica las series: $\sum (-1)^n\, f(n)$ $\qquad\qquad$ $\sum f(n)\, e^{-n}$

Ejercicio 2. Sea $f(x)$ una función continua y tres veces derivable, que verifica

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = -1/2.$$

Considera la función $g(x)$, definida mediante

$$g(x) = xf(x) + \int_0^{x^2} f(t)dt.$$

(a) Calcular $g'(x)$ y $g''(x)$.

(b) Calcula el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de la función $g(x)$, y halla el valor de a de forma que

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - ax}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(c) Sea $b_n = g(1/n) - a/n$ (para el valor de a hallado en la parte anterior). Clasifica las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n.$$

(d) Para el mismo valor de a, clasifica la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{dx}{g(x) - ax}.$$

Ejercicio 3. Consideremos la ecuación diferencial:

$$(E) \qquad t^2\,\ddot{x} \;+\; 3t\,\dot{x} \;+\; x \;=\; 0$$

(a) Encuentra una solución de la forma $x_1(t) = \frac{1}{at+b}$ (en donde a y b son constantes) tal que $x_1(1) = 1$.

(b) Encuentra la solución general de (E) usando el cambio de variable: $x(t) = x_1(t)u(t)$.

(c) Sea g la solución de (E) que verifica $g(e) = 1/e$ y $g'(e) = 0$. Consideremos la región $A = \{\ (x, y)\ /\ e < x < e^2,\ 0 < y < g(x)\ \}$. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región A alrededor del eje Ox.