Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I–Curso 2004

EXAMEN

26 de julio de 2004

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable no negativa, tal que $f(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ y $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$. Si $h > 0$, sea $f_h(x) = \frac{1}{h} f(\frac{x}{h})$.

   a) Demostrar que $f_h(x) = 0$ si $|x| \geq h$ y que $\int_{-h}^{h} f_h(x)\,dx = 1$.

   b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo intervalo acotado y continua en 0. Demostrar que $\lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} f_h(x)g(x)\,dx = g(0)$.

   c) Sea f tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 - \operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{2}) & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$. Probar que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ y que f es derivable. Calcular f_h'.

   d) Calcular $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\pi}{h^2} \int_{-h}^{h} e^x \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2h}) \cos(\frac{\pi x}{2h})\,dx$ (se sugiere integrar por partes).

2. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-t^2})dt$

   a) Clasificar $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-x^2})dx$ y $\int_0^{+\infty} F(x)\ln(1 + e^{-x^2})dx$.

   b) Hallar el polinomio de Taylor de F en 0, de grado 3.

   c) Probar que $\sum_{n\geq 1} F(1/n)$ diverge y que $\sum_{n\geq 1}(-1)^n F(1/n)$ converge. Deducir que el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} F(1/n)x^n$ es 1.

   d) Sea $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sum_{n\geq 1} F(1/n)x^n$. Usando el desarrollo de g en serie de potencias, expresar $g'(x^2)$ como la suma de una serie de potencias que converge en $(-1, 1)$.

3. *a*) Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones, donde $f_n : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que f_n es uniformemente continua, $\forall n \geq 1$. Demostrar que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f sobre X, entonces f es uniformemente continua.

   b) Sea f un polinomio de coeficientes reales. Probar que f es uniformemente continua en cualquier intervalo acotado.

   c) Sea $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1/x$. Probar que no es posible encontrar una sucesión de polinomios que converja uniformemente a g en el intervalo $(0, 1)$.

Soluciones

1. *a*) Si $|x| \geq h$, entonces $|x/h| \geq 1$, y por lo tanto $f_h(x) = \frac{1}{h} f(\frac{x}{h}) = 0$. Por otro lado, haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{h}$, la integral de f_h en $[-h, h]$ queda:

$$\int_{-h}^{h} f_h(x)dx = \int_{-h}^{h} \frac{1}{h} f(\frac{x}{h})dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{h} h f(u)du = \int_{-1}^{1} f(u)du = 1$$

b) Como g es continua en 0, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces $|g(t) - g(0)| < \epsilon$. Tomando $h \in (0, \delta)$, y teniendo en cuenta que $f_h \geq 0$ y $\int_{-h}^{h} f_h(x)dx = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} |g(0) - \int_{-h}^{h} g(x) f_h(x)dx| &= | \int_{-h}^{h} \big(g(0) - g(x)\big) f_h(x)dx| \\ &\leq \int_{-h}^{h} |g(0) - g(x)| f_h(x)dx \\ &< \int_{-h}^{h} \epsilon f_h(x)dx \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

de donde $\lim_{h \to 0} \int_{-h}^{e} h f_h(x) g(x)\, dx = g(0)$.

c) De la definición de f se tiene:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2})dx = 2 - \big[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \cos^2(\frac{\pi x}{2})dx\big],$$

de donde $\int_{-1}^{1} (1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2})dx = 2 - \int_{-1}^{1} (1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2})dx$, y por lo tanto $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$.

En cuanto a la derivabilidad de f, si $|x| < 1$ es claro que existe $f'(x)$, y además $f'(x) = \pi \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) \cos(\frac{\pi x}{2})$; del mismo modo, si $|x| > 1$, entonces $f'(x) = 0$, ya que $f = 0$ en un entorno de x. Por último, se desprende de lo anterior que si $|x| = 1$, se tiene que $\lim_{h \to 0} f'(x + h) = 0$, lo que implica que f es derivable en x y que $f'(x) = 0$.

Finalmente: $f_h'(x) = \frac{1}{h^2} f'(\frac{x}{h}) = \begin{cases} \frac{\pi}{h^2} \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2h}) \cos(\frac{\pi x}{2h}) & \text{si } |x| \leq h \\ 0 & \text{si } |x| \geq h \end{cases}$.

d) Integrando por partes:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\pi}{h^2} \int_{-h}^{h} e^x \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2h}) \cos(\frac{\pi x}{2h})dx &= \lim_{h \to 0} \Big[-e^x f_h(x)\big|_{-h}^{h} + \int_{-h}^{h} e^x f_h(x)dx \Big] \\ &= \lim_{h \to 0} \int_{-h}^{h} e^x f_h(x)dx \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. *a*) La integral $\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-x^2})dx$ converge, porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^{-x^2})}{e^{-x^2}} = 1$, y $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$ converge. En cuanto a $\int_0^{+\infty} F(x) \ln(1 + e^{-x^2})dx$, notar que $\int_0^x F(t) \ln(1 + e^{-t^2})dt = \frac{1}{2} F(t)^2\big|_0^x = \frac{1}{2} F(x)^2$, y por lo tanto la segunda integral a clasificar también es convergente..

b) Calculamos las tres primeras derivadas de F: $F'(x) = \ln(1 + e^{-x^2})$, $F''(x) = \frac{-2xe^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}$, $F^{(3)}(x) = \frac{e^{-x^2}}{(1+e^{-x^2})^2} \Big((4x^2 - 2)(1 + e^{-x^2}) - 4x^2 e^{-x^2} \Big)$. Por lo tanto $F(0) = 0$, $F'(0) = \ln 2$, $F''(0) = 0$ y $F^{(3)}(0) = -1$. En consecuencia el polinomio buscado es $T_3(F)(x) = x \ln 2 - \frac{1}{3!} x^3$.

c) Como $F'(x) > 0$ $\forall x > 0$, entonces F es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$; por lo tanto la sucesión $(F(1/n))_{n \geq 1}$ es estrictamente decreciente. Por otro lado, $F(0) = 0$ y F es continua en 0, así que $\lim\limits_{n \to +\infty} F(1/n) = 0$. Se deduce entonces, usando el criterio de Leibniz, que la serie

$\sum_{n\geq 1}(-1)^n F(1/n)$ converge. Para ver que $\sum_{n\geq 1} F(1/n)$ diverge, basta notar que por (b) se tiene que $\lim_n \frac{F(1/n)}{\frac{1}{n}\ln 2} = 1$, de donde las series de términos positivos $\sum_{n\geq 1} F(1/n)$ y $\sum_{n\geq 1} 1/n$ convergen o divergen simultáneamente. Como sabemos que la serie armónica $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge, entonces $\sum_{n\geq 1} F(1/n)$ también diverge.

Sea r el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} F(1/n)x^n$, de modo que si $|x| < r$ la serie converge absolutamente, y si $|x| > r$ la serie diverge. Como sabemos que la serie diverge para $x = 1$, debe ser $r \leq 1$. Por otro lado, si fuera $r < 1$, entonces la serie debería diverger en $x = -1$, lo cual no sucede; luego debe ser $r \geq 1$, de donde se concluye que $r = 1$.

d) Sabemos que la derivada de g en $(-1,1)$ se puede obtener sumando la serie que se obtiene derivando término a término la serie de g. Por lo tanto $g'(x) = \sum_{n\geq 1} nF(1/n)x^{n-1}$, $\forall x \in (-1,1)$. Por otra parte, si $x \in (-1,1)$, entonces $x^2 \in [0,1)$, y por lo tanto $g'(x^2) = \sum_{n\geq 1} nF(1/n)(x^2)^{n-1}$, es decir, $g'(x^2) = \sum_{n\geq 1} nF(1/n)x^{2n-2}$.

3. *a*) Sea $\epsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f, dado $\epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que si $n \geq n_\epsilon$, entonces $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$. Usando el hecho de que f_{n_ϵ} es uniformemente continua, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $x, x' \in X$ y $|x - x'| < \delta$, entonces $|f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x')| < \frac{\epsilon}{3}$. Por lo tanto, si $x, x' \in X$ y $|x - x'| < \delta$, se tiene:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x')| + |f_{n_\epsilon}(x') - f(x')| \\
&\leq 2\|f - f_{n_\epsilon}\|_\infty + |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x')| \\
&< 2\frac{\epsilon}{3} + |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x')| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

b) Todo intervalo acotado está contenido en $[-n, n]$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Como f es continuo en $[-n, n]$, también es uniformemente continuo en $[-n, n]$. Luego es uniformemente continuo en cualquier subconjunto de $[-n, n]$.

c) Si g fuera el límite uniforme de polinomios en el intervalo $(0,1)$, entonces por (a) y (b) g debería ser uniformemente continua en dicho intervalo. Sin embargo, dado $\delta > 0$ podemos encontrar $n_\delta \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$, $\forall n \geq n_\delta$. Entonces, si $n \geq n_\delta$: $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} < \delta$, mientras que $\frac{1}{1/2^{n+1}} - \frac{1}{1/2^n} = 2^n \to \infty$, lo que implica que g no es uniformemente continua en $(0,1)$.