Centro de Matemática 2 de febrero de 2003

Examen de Cálculo I

Ejercicio 1. Se considera $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$F(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt.$$

(a) Estudiar $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.
(b) Estudiar el signo de $F'(x)$ y bosquejar el gráfico de $F(x)$.
(c) Clasificar la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx.$$

Ejercicio 2. (a) Hallar el polinomio de Mac Laurin de grado 5 de la función

$$f(x) = \tan x(1 - \cos x),$$

y determinar α real para que $f(x) - \alpha x^3$ sea un infinitésimo del mayor orden posible.
(b) Para el valor de α hallado, clasificar, discutiendo según β real, la integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{f(x) - \alpha x^3}{x^\beta} dx.$$

(c) Calcular la integral

$$\int_0^{\pi/4} f(x)dx.$$

Ejercicio 3. (a) Demostrar que

$$\int_\pi^x \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} dt = 2\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt.$$

(b) Demostrar que

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} dt \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(c) Clasificar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} dt, \qquad \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt.$$

(d) ¿Es cierto que si $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$?