Examen de Cálculo 1 Febrero de 2002

(I) (a) Calcular:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4+t^2+1}\, dt$$

(Se sugiere observar que $t^4+t^2+1 = (t^2+t+1)(t^2-t+1)$).

(b) Calcular:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 x}{sen^4 x \ + \ cos^2 x}\, dx$$

(Se sugiere hacer el cambio de variable $t = tg(x)$ con lo cual resulta $cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$).

(II) Sea f dada por:

$$f(t) \ = \ e^{-t}\, cos^2\left(e^{-t}\right)$$

(a) Probar que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

(b) Calcular: $a_n = \int_n^{+\infty} f(t)\, dt$ y $\int_n^{n+2} f(t)\, dt$.

(c) Clasificar las series:

$$\sum a_n \qquad \sum b_n \qquad \sum (-1)^n\, a_n \qquad \sum \frac{(-1)^n}{a_n}$$

(III) Consideremos la ecuación diferencial:

$$(E) \qquad \ddot{x} \ = \ a(t)\, x \ + \ b(t)\, \dot{x} \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}).$$

en donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Se sabe que (E) admite una solución $w(t)$ tal que $u(t) = e^{w(t)-1}$ también es solución.

(a) Mostrar que $w(t)$ verifica la relación:

$$\dot{w}(t)^2 \ = \ a(t)\ (1-w(t)) \qquad\qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Si se sabe además que $w(0) = 1$, deducir que $\dot{w}(0) = 0$, $u(0) = 1$ y $\dot{u}(0) = 0$.

(c) Según las partes anteriores tenemos que $w(t)$ y $u(t)$ son dos soluciones de (E) definidas en todo $\mathbb{R}$ y que cumplen las mismas condiciones iniciales ($u(0) = w(0)$ y $\dot{u}(0) = \dot{w}(0)$). Resulta entonces (unicidad de soluciones) que $u(t) = w(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Determinar $w(t)$ y probar que $a(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.