Examen. 23 de enero del 2001

1. (a) Calcular
$$\int_0^x \frac{2t-3}{(t^2+4)(t+1)}\,dt, \qquad x>0.$$
   (b) Calcular el valor de
$$\int_0^{+\infty} \frac{2t-3}{(t^2+4)(t+1)}\,dt$$
   (c) Clasificar
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t-3}{(t^2+4)(t+1)}\,dt$$

2. (a) Hallar una función f tal que
$$f'(x)=\int_0^x f(t)\;dt \quad \text{para todo } x\in R \quad \text{y} \quad f(0)=1.$$
   En todo lo que sigue f es la función hallada en esta parte.
   (b) Clasificar
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$$
   (c) Clasificar
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right]^2$$
   (d) Probar que $f:(0,+\infty)\longrightarrow(1,+\infty)$ tiene inversa y calcular $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$

3. Sea $a_n=\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$.
   (a) Probar que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$$
   converge para todo $n\geq 0$.
   (b) Probar que $a_n=0$ si n es impar y hallar una fórmula de recurrencia para los n pares. Hallar a_{2k} en función de a_0.
   (c) Clasificar las tres series: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.