Centro de Matemática 9 de diciembre de 2003

Examen de Cálculo I

Ejercicio 1.

(a) Sea $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Clasificar la series

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$, discutiendo según α real.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

(b) Demostrar, que para todo $x > 0$ se verifica

$$\operatorname{Artan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \operatorname{Artan}\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{Artan}\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

(c) Dado el término general

$$b_n = \operatorname{Artan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right),$$

verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es telescópica, clasificarla, y sumarla si corresponde.

Ejercicio 2. Consideremos $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$.

(a) Demostrar, que si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, entonces, para cualquier $\delta > 0$, $\int_x^{x+\delta} f(t)dt$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$.

(b) Probar que

$$\int_{\pi/2}^{x} t^\alpha \operatorname{sen} t dt = -x^\alpha \cos x - \alpha \int_{\pi/2}^{x} t^{\alpha-1} \cos t dt$$

y deducir que si $\alpha < 0$ entonces $\int_{\pi/2}^{+\infty} t^\alpha \operatorname{sen} t dt$ converge.

(c) Probar que si $\alpha \geq 0$ entonces

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} t^\alpha \operatorname{sen} t dt$$

no converge. Sugerencia: observar que si

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \leq t \leq (2n+1)\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{entonces } \operatorname{sen} t \geq 1/\sqrt{2}.$$

Ejercicio 3.

(a) Hallar el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de la función

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

(b) Se consideran $p+1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_p$ cuya suma es cero, es decir

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0.$$

Probar que

$$\lim_n \left[a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}\right] = 0.$$

Sugerencia: Tomar factor común $\sqrt{n}$ y estudiar $\sqrt{1+j/n}$ $(j = 1, \ldots, p)$.