Centro de Matemática. 9 de agosto de 2002

Examen de Cálculo I

Ejercicio 1.

(a) Calcula $\displaystyle\int_1^x t^2 e^{-t} dt$, y clasifica $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}(t^2+8t+7)dt$.

(b) Calcula $\displaystyle\int_1^x t^3 e^{-t^2} dt$, y clasifica $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{t^4}{1+t} e^{-t^2} dt$.

(c) Calcula $\displaystyle\int_1^x \frac{\log t}{1+(\log t)^2}\frac{dt}{t}$, y clasifica $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log t}{1+(\log t)^2}\frac{dt}{t}$.

Ejercicio 2. Consideremos la ecuación diferencial:

$$(E) \qquad (t^2+1)\,\ddot{x} \;+\; k\,t\,\dot{x} \;=\; t^3+t \qquad\qquad k \neq 0.$$

(a) Mostrar que (E) admite soluciones polinómicas de tercer grado, excepto para un valor de la constante k (distinto de cero) que se hallará.

(b) Hallar la solución general de (E) para $k=1$.

(c) Sea f la solución de (E) hallada en la parte anterior que verifica $f(0)=0$ y $\dot{f}(0)=1$. Hallar el polinomio de Mac Laurin de orden 3 de f.

Ejercicio 3.

(a) Sea $(p_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de reales positivos. Probar que las series $\sum p_k$ y $\sum L(1+p_k)$ tienen el mismo comportamiento.

(b) Sea $(p_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de reales positivos y consideremos la sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ definida por:

$$B_n \;=\; \prod_{k=1}^n (1+p_k) \;=\; (1+p_1).(1+p_2).\;.\;.\;.\;.\;(1+p_n)$$

(i) Probar que (B_n) es monótona creciente.

(ii) Demostrar que (B_n) tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum_{k=1}^\infty p_k$.

(c) Determinar la convergencia, discutiendo según α real, de la sucesión

$$B_n \;=\; \prod_{k=1}^n \Big(1+\frac{1}{n^\alpha}\Big), \qquad n=1,2,\ldots$$