Universidad de la República Facultad de Ciencias Centro de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I. Curso 2001.

Examen de Cálculo 1 agosto de 2001

(I) (puntos)

(a) Calcula las siguientes integrales:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\ sen^3(1+Lx)\ dx \qquad\qquad \int_2^4 \frac{1}{(2x^2+1)\ (x-1)}\ dx$$

(b) Clasifica:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ sen^3(1+Lx)\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x^2+1)\ (x-1)}\ dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{(2x^2+1)\ (x-1)}\ dx$$

(II) (puntos) Consideremos la ecuación diferencial:

$$(E) \quad \ddot{x}\ -\ \dot{x}\ -2x\ =\ 3\ e^{2t}$$

(a) Encuentra la solución general de (E) sabiendo que admite una solución particular de la forma $x_p(t) = Ate^{2t}$.

(b) Sea $f(t)$ la solución de (E) tal que $f(0) = 0$ y $\dot{f}(0) = -2$. Encuentra el desarrollo de Mac Laurin de orden 2 de f y clasifica la serie:

$$\sum n^\alpha \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} \right]$$

discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$.

(III) (puntos) Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$a_0 = 0 \qquad\qquad a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

(a) Demuestra que (a_n) es monótona creciente y que está acotada superiormente por 4. ¿(a_n) converge? En caso afirmativo, calcula su límite.

(b) Clasifica la serie:

$$\sum \left(\frac{cos\ n}{n^2}\ +\ (-1)^n(4-a_n) \right)$$

(IV) (puntos) Sea f una función con derivada continua en $[0,1]$, tal que $f(1) = 1$, $f(t) \geq 0, \forall\ t \in [0,1]$, $f'(t) \geq 0, \forall\ t \in [0,1]$ que verifica:

$$\int_0^x t\ f'(t)\ dt\ \geq \frac{x^2}{2} \qquad\qquad \forall x \in [0,1].$$

(a) Demuestra que, para cada $x \in [0,1]$ se cumple:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \;\leq\; min\{\; x \;,\; 1 - \frac{x^2}{2} \;\}$$

(b) Clasifica las series:

$$(i) \quad \sum \left[F\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - F\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \qquad (ii) \sum f\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$