Examen. 14 de agosto del 2000

1. (a) Haciendo la sustitución $u = \sqrt{t+1}$ calcular

$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\, dt, \quad x > 0.$$

(b) Demostrar que $\int_1^{+\infty} 1/\big(t\sqrt{t+1}\big)\, dt$ converge y calcular su valor.

(c) Encontrar cotas para la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

(d) Demostrar que

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t(t+1)}}\, dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\, dt$$

para todo $x > 0$ y calcular $\int_0^1 1/\sqrt{t(t+1)}\, dt$.

2. Consideremos la ecuación diferencial

$$(E) \quad \dot{x} = \operatorname{sen} x.$$

(a) Hallar la solución de (E) con condición inicial $x(0) = \pi$.

(b) Hallar la solución de (E) con condición inicial $x(0) = \pi/2$.

(c) Probar que toda solución de (E) también es solución de la ecuación de segundo orden $\ddot{x} = \operatorname{sen} x \cos x$. Hallar una ecuación de tercer orden que sea satisfecha por cualquier solución de (E).

(d) Encontrar el desarrollo de Taylor de orden 3 en 0 de la solución hallada en (b).

(e) Calcular $x(1/10)$ con un error menor que $1/100$.

3. Sea

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos^n x\, dx.$$

(a) Probar que I_n converge para todo $n \geq 1$.

(b) Probar que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(c) Probar que para todo $n \geq 2$ se cumple

$$I_n = \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{2n} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos^{n-2} x\, dx.$$

(d) Clasificar las series $\sum I_n^2$ y $\sum (I_n/n)$.