Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I–Curso 2004

EXAMEN

16 de agosto de 2004

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable según Riemann en todo intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Supóngase que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = g(x) + \int_0^x \frac{tf(t)}{1+t^2}dt, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
   a) Probar que g es integrable en todo intervalo cerrado y acotado.
   b) Probar que si g es continua entonces f es continua, y que si g es derivable, f también lo es.
   c) Sabiendo que $g(x) = \frac{3}{4}x^4$, calcular $f(0)$ y hallar la función f.

2. Supóngase que $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua y decreciente, y tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   a) Sea $a_n := \int_n^{n+1} f(x)|\operatorname{sen} \pi x|dx, \forall n \in \mathbb{N}$. Probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y tiende a cero (Sugerencia: notar que $|\operatorname{sen} \pi x| = |\operatorname{sen} \pi(x-1)|, \forall x \in \mathbb{R}$).
   b) Mostrar que existe y es finito $\lim\limits_{n} \int_0^n f(x) \operatorname{sen} \pi x dx$.
   c) Deducir que $\int_0^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} \pi x dx$ converge.
   d) Clasificar $\int_0^{+\infty} x^2 \operatorname{sen} \pi e^x dx$.

3. Sea $(\alpha_n)_{n\geq1} \subseteq (0, \infty)$. Para cada $n \geq 1$ se considera $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = e^{-\alpha_n x}$.
   a) Demostrar que para cada n existe un único $\beta_n \in (0, 1)$ tal que $f_n(\beta_n) = \beta_n$.
   b) Demostrar que $\sum \alpha_n$ converge si y sólo si $\sum(1 - \beta_n)$ converge, donde β_n es como en la parte anterior (Sugerencia: aplicar el teorema del valor medio a $f_n - id$).
   c) Sea $[a, b] \subseteq [0, \infty)$. Probar que:
      1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, entonces (f_n) converge uniformemente en $[a, b]$.
      2) Si $\sum \alpha_n$ converge, entonces $\sum(1 - f_n)$ converge uniformemente en $[a, b]$

Soluciones

1. a) Sea $[a,b]$ un intervalo. Como f y $\frac{x}{1+x^2}$ son integrables en $[a,b]$ (la primera por hipótesis y la segunda porque es continua), entonces su producto también es una función integrable en $[a,b]$. Luego, si $h(x) := \int_0^x \frac{tf(t)}{1+t^2}dt$, se tiene que h es continua y en consecuencia integrable en $[a,b]$. Finalmente, como las combinaciones lineales de funciones integrables son integrables y $g = f - h$, se concluye que g es integrable en $[a,b]$.

   b) Sea h como en (a); ya fue observado que h es continua. Si g es continua entonces $g + h = f$ también debe ser continua. Si g es derivable, es en particular continua, de donde f es continua, y entonces h es derivable por el teorema fundamental del cálculo; pero entonces $g + h = f$ es derivable.

   c) Notar que $f(0) = g(0)$. Si $g(x) = \frac{3}{4}x^4$, entonces $f(0) = 0$. Por (b) se sabe que f es derivable. Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $f'(x) = 3x^3 + \frac{xf(x)}{1+x^2}$. Por lo tanto

$$f'(x) - \frac{x}{1+x^2}f(x) = 3x^3 \tag{1}$$

Notar que una primitiva de $-\frac{x}{1+x^2}$ es $-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Multiplicando cada miembro de la ecuación (1) por el factor integrante $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ se obtiene $\left(f\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = 3x^3\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. De manera que, como $f(0) = 0$, se tiene $f(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^x \left(f(t)\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)' dt$, y por lo tanto

$$f(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^x 3t^3\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \tag{2}$$

Para obtener f sólo hace falta entonces evaluar $\int_0^x 3t^3\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$. Esto se puede llevar a cabo por ejemplo realizando el cambio de variable $\xi = t^2$ y luego integrando por partes, o también directamente. En el primer caso, luego del cambio $\xi = t^2$ la integral queda igual a $\frac{3}{2}\int_0^{x^2}\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi}}d\xi$, e integrando por partes:

$$\frac{3}{2}\int_0^{x^2}\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi}}d\xi = 3\xi(1+\xi)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{x^2} - 3\int_0^{x^2}(1+\xi)^{\frac{1}{2}}d\xi = 3x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 2(1+\xi)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2} = 3x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 2(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + 2.$$

Teniendo esto en cuenta, y despejando f en la ecuación (2), se obtiene: $f(x) = 3x^2(1+x^2) - 2(1+x^2)^2 + 2\sqrt{1+x^2}$, es decir:

$$f(x) = x^4 - x^2 - 2 + 2\sqrt{1+x^2}$$

Como fue comentado anteriormente, la integral se puede calcular directamente, por ejemplo de la manera siguiente:

$$\int_0^x 3t^3\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_0^x \frac{3t(1+t^2) - 3t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int_0^x 3t(1+t^2)^{\frac{1}{2}}dt - \int_0^x 3t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}dt = (1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x - 3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^x$$

2. a) Usando la sugerencia: $a_{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} f(x)|\operatorname{sen}\pi(x-1)|dx$. Haciendo el cambio de variable $\upsilon = x - 1$ en la integral que define a_{n+1} queda $a_{n+1} = \int_n^{n+1} f(\upsilon+1)|\operatorname{sen}\pi\upsilon|d\upsilon$. Como f es decreciente se tiene que $f(z+1) \le f(z)$, $\forall z$, de donde $\int_n^{n+1} f(\upsilon+1)|\operatorname{sen}\pi\upsilon|d\upsilon \le \int_n^{n+1} f(\upsilon)|\operatorname{sen}\pi\upsilon|d\upsilon = a_n$, y por lo tanto $a_{n+1} \le a_n$. Para ver que $a_n \to 0$, notar que:

$$0 \le a_n = \int_n^{n+1} f(x)|\operatorname{sen}\pi x|dx \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)(n+1-n) = f(n) \to 0.$$

   b) Obsérvese que $\int_0^n f(x)\operatorname{sen}\pi x dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\operatorname{sen}\pi x dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)(-1^k)|\operatorname{sen}\pi x|dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k$. Como (a_n) es una sucesión decreciente a cero, el criterio de Leibniz implica que existe $\lim_n \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k$, y por lo tanto existe $\lim_n \int_0^n f(x)\operatorname{sen}\pi x dx$.

   c) Sea $L := \lim_n \int_0^n f(x)\operatorname{sen}\pi x dx$. Dado $\epsilon > 0$ sea $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $x \ge n_\epsilon$ y $n \ge n_\epsilon$ se tiene que $f(x) < \frac{\epsilon}{2}$ y $|L - \int_0^n f(x)\operatorname{sen}\pi x dx| < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $[x]$ la parte entera de x, es decir, $[x] := \max\{k \in \mathbb{N} : k \le x\}$. Entonces si $x \ge n_\epsilon$ se tiene que $[x] \ge n_\epsilon$, y $0 \le x - [x] \le 1$, de donde:

$$|L - \int_0^x f(t)\operatorname{sen}\pi t dt| \le |L - \int_0^{[x]} f(t)\operatorname{sen}\pi t dt| + |\int_{[x]}^x f(t)\operatorname{sen}\pi t dt| \le \frac{\epsilon}{2} + (x - [x])f([x]) < \epsilon.$$

En consecuencia $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)\operatorname{sen}\pi t dt = L$.

   d) Haciendo el cambio de variable $\varsigma = e^t$ en la integral $\int_0^x t^2\operatorname{sen}\pi e^t dt$, ésta queda igual a $\int_1^{e^x}\frac{(\ln\varsigma)^2}{\varsigma}\operatorname{sen}\pi\varsigma d\varsigma$. La derivada de la función $\frac{(\ln\varsigma)^2}{\varsigma}$ es $\frac{\ln\varsigma}{\varsigma^2}(2 - \ln\varsigma)$, que es negativa si $\varsigma > e^2$. Luego $\frac{(\ln\varsigma)^2}{\varsigma}$ es decreciente a partir de $\varsigma = e^2$. Como además $\lim\limits_{\varsigma\to+\infty}\frac{(\ln\varsigma)^2}{\varsigma} = 0$, se concluye usando la parte anterior que la integral $\int_1^{+\infty}\frac{(\ln\varsigma)^2}{\varsigma}\operatorname{sen}\pi\varsigma d\varsigma$ converge. Consecuentemente $\int_0^{+\infty} t^2\operatorname{sen}\pi e^t dt$ es convergente.

3. *a*) El teorema de Bolzano implica que la función $f_n - id$ debe anularse en $(0, +\infty)$, puesto que $(f_n - id)(0) = 1$ y $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - x) = -\infty$. Por otro lado, la derivada de $f_n - id$ es negativa en cada $x \in [0, \infty)$, así que $f_n - id$ es estrictamente decreciente en $[0, \infty)$, lo que implica que sólo se anulará una vez. Dicho de otra forma, existe un único $\beta_n \in (0, +\infty)$ tal que $f_n(\beta_n) = \beta_n$. Como $f_n(0, +\infty) = (0, 1)$, debe ser $\beta_n \in (0, 1)$.

b) Usando el teorema del valor medio en el intervalo $[\beta_n, 1]$ para la función $f_n - id$, se tiene que existe $\theta_n \in (\beta_n, 1)$ tal que $(f_n - id)(1) - (f_n - id)(\beta_n) = (f'_n - 1)(\theta_n)(1 - \beta_n)$. Teniendo en cuenta que $(f_n - id)(\beta_n) = 0$, se deduce que $1 - e^{-\alpha_n} = (1 + \alpha_n e^{-\alpha_n\theta_n})(1 - \beta_n)$, de manera que $1 - e^{-\alpha_n} = (1 - \beta_n) + \alpha_n e^{-\alpha_n\theta_n}(1 - \beta_n)$. De la igualdad anterior se concluye que $\lim_n \alpha_n = 0 \iff \lim_n \beta_n = 1$, y también que $(1 - \beta_n) < 1 - e^{-\alpha_n} < (1 + \alpha_n)(1 - \beta_n)$.

Si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum(1 - e^{-\alpha_n})$ también converge, ya que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-\alpha_n}}{\alpha_n} = 1$; como $1 - e^{-\alpha_n} > 1 - \beta_n$, entonces $\sum(1 - \beta_n)$ también debe converger.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\sum(1 - \beta_n)$ es convergente. Entonces $\alpha_n \to 0$, y por lo tanto $\sum(1 + \alpha_n)(1 - \beta_n)$ también es convergente; como $0 < 1 - e^{-\alpha_n} < (1 + \alpha_n)(1 - \beta_n)$, entonces $\sum(1 - e^{-\alpha_n})$, y en consecuencia $\sum \alpha_n$, son convergentes.

c) Sea $x \in [a, b]$. Entonces $0 \le 1 - f_n(x) \le 1 - f_n(b) = 1 - e^{-\alpha_n b} < \alpha_n b$, ya que la función $x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ es creciente en $[0, +\infty)$ y se anula en $x = 0$. Si $\alpha_n \to 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_\epsilon$ entonces $\alpha_n b < \epsilon$; luego $|1 - f_n(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a, b]$ y $\forall n \ge n_\epsilon$, de donde (f_n) converge uniformemente a 1 en $[a, b]$. Finalmente, si $\sum \alpha_n$ converge, también converge $\sum \alpha_n b$, y entonces $\sum(1 - f_n)$ converge uniformemente en $[a, b]$ por el criterio de la mayorante de Weierstrass.