Modelos y problemas: Barreras, parada óptima, control y . . .

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

VII jornadas de estadística aplicada
La Paloma, Rocha - 20/10/2023

Dedicada a[1]

Gonzalo Pérez Iribarren

26/6/1936 Carmelo - 27/8/1998 Montevideo

[1] Nuestro primer profesor de Probabilidad y Estadística

Contenidos

Modelos

- Modelo 1: Paseo al azar
- Modelo 2: Proceso de Wiener - Movimiento Browniano
- Modelo 3: Difusión de Itō
- Modelo 4: Procesos de Lévy

Problemas

- Problema 1: de una barrera
- Problema 2: de dos barreras
- Problema 3: Parada óptima
- Problema 4: Juego de Dynkin
- Problema 5: Control
- Problema 6: Juego de campo medio

Modelos

- Nuestro modelo es un *proceso estocástico*
- Cuantifica la evolución temporal de una variable de interés con incertidumbre
- Ejemplo: Tiramos una moneda repetidas veces
- Ejemplo: Medimos la temperatura cada día en un punto a una cierta hora

Modelo 1: Paseo al azar

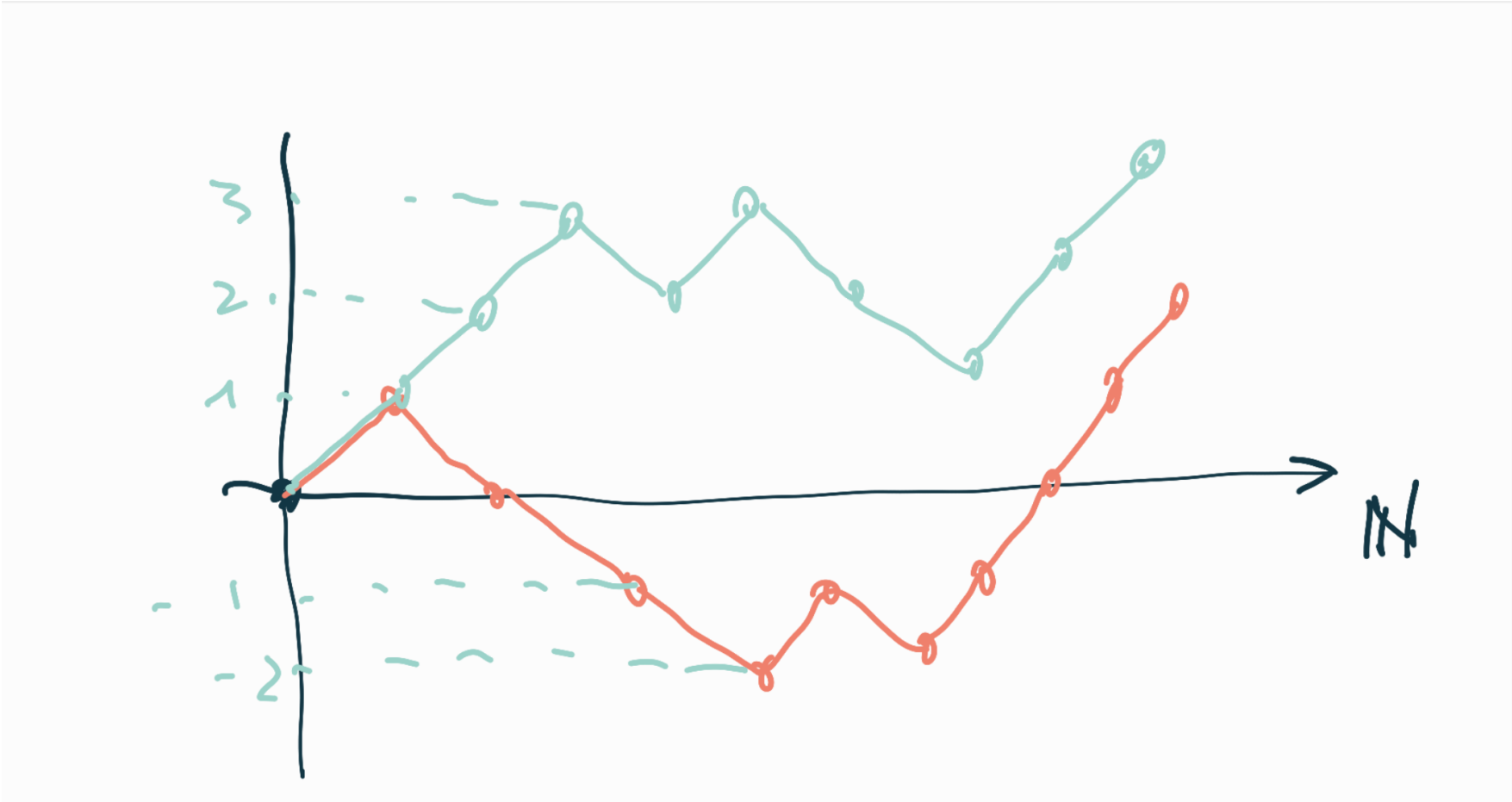
- Partimos de un punto $x \in Z$
- En cada instante de tiempo sumamos o restamos 1, de acuerdo al resultado de la moneda
- Llamamos X_k al resultado de la tirada en tiempo k. Tenemos

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

- Ponemos $S_0 = x$, $S_n = S_{n-1} + X_n$, es decir

$$S_n = x + X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Dos trayectorias de un paseo al azar



Modelo 2: Proceso de Wiener - Movimiento Browniano

Es un proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ y parte de $X_0 = x$:

(1) Es un modelo de tiempo continuo $t \geq 0$.

(2) La curva X_t para $\omega \in \Omega$ fijo es *continua*

(3) Para tiempos $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes

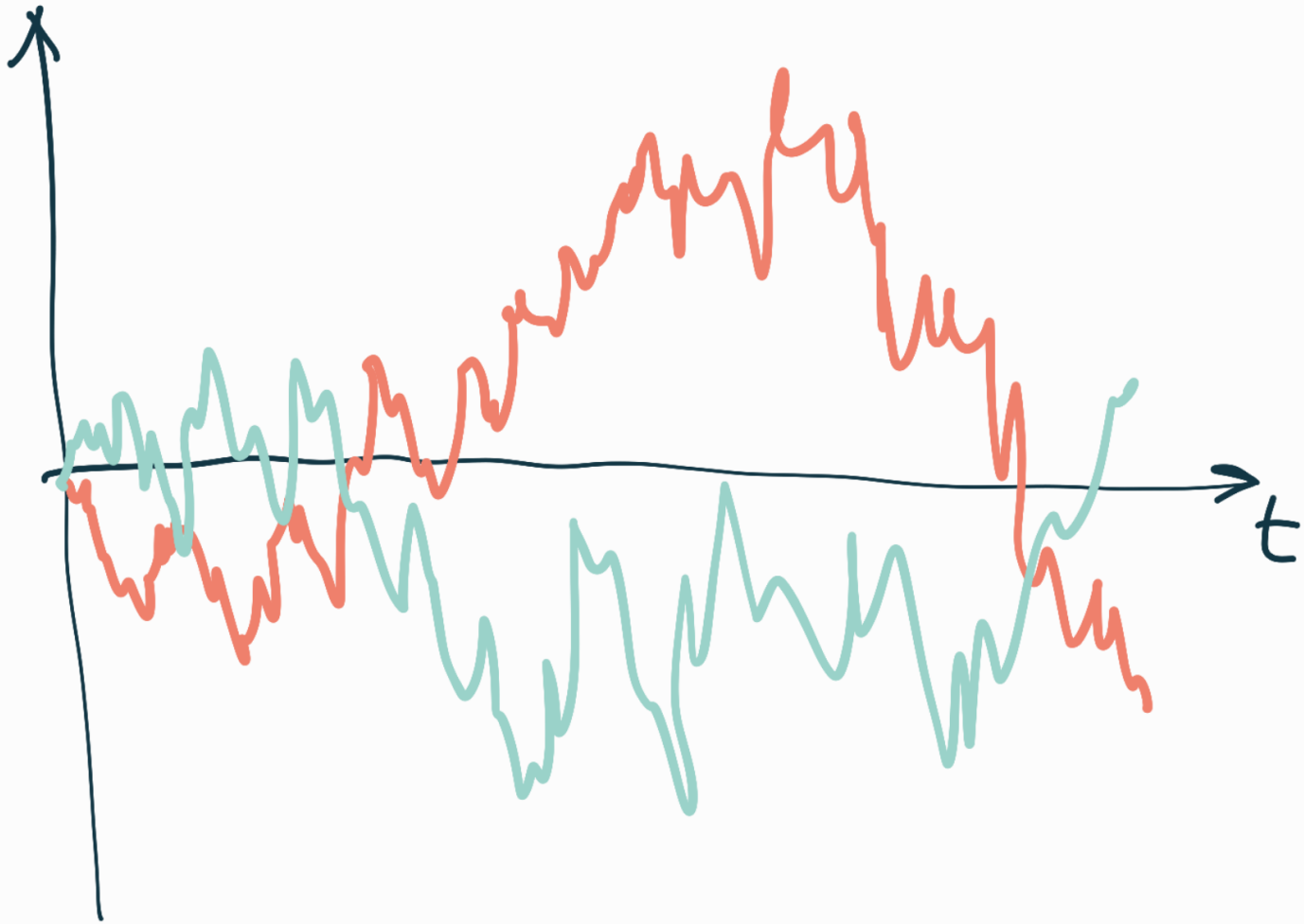
(4) Coinciden las leyes de probabilidad de

$$X_h - X_0, \quad \text{y} \quad X_{t+h} - X_t.$$

(5) Es un modelo de tiempo continuo $t \geq 0$. Es normal o gaussiano: $X_h \sim \mathcal{N}(0, h)$.

- Robert Brown (botánico) caracteriza el movimiento, Norbert Wiener (1933) construye el modelo

Dos trayectorias Brownianas



Modelo 3: Difusión de Itō

El proceso $\{X(t)\colon t \geq 0\}$ es la solución de una ecuacioón diferencial estocástica

$$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s))\, ds + \int_0^t b(s, X(s))\, dW(s)$$

donde

- $\{W(s)\}$ es un proceso de Wiener
- $a(s, x)$ y $b(s, x)$ son funciones "buenas"

Un proceso con reversión a la media

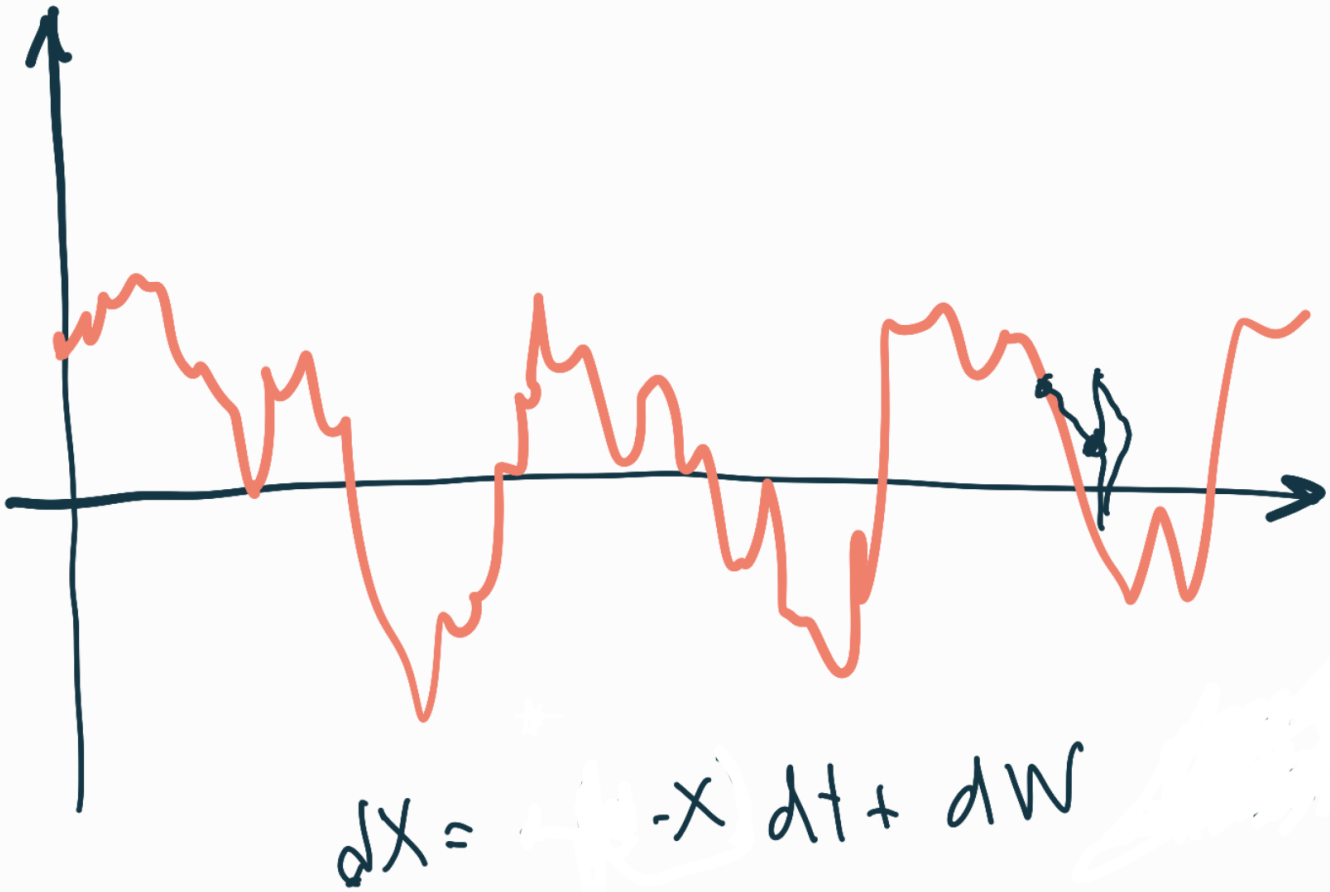


Figura: Proceso de Ornstein Uhlenbeck

Modelo 4: Procesos de Lévy

Es un proceso que verifica:

(1) Es un modelo de tiempo continuo $t \geq 0$.

(3) Para tiempos $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes

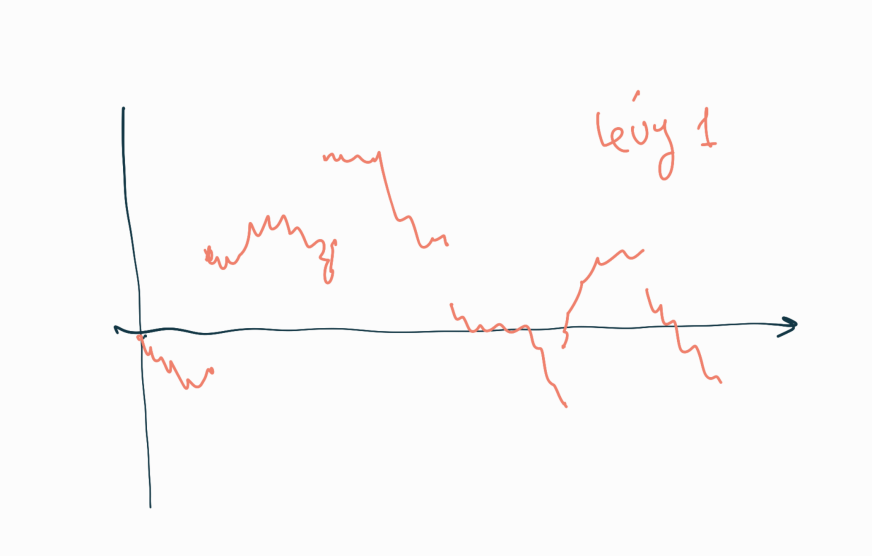
(4) Coinciden las leyes de probabilidad de

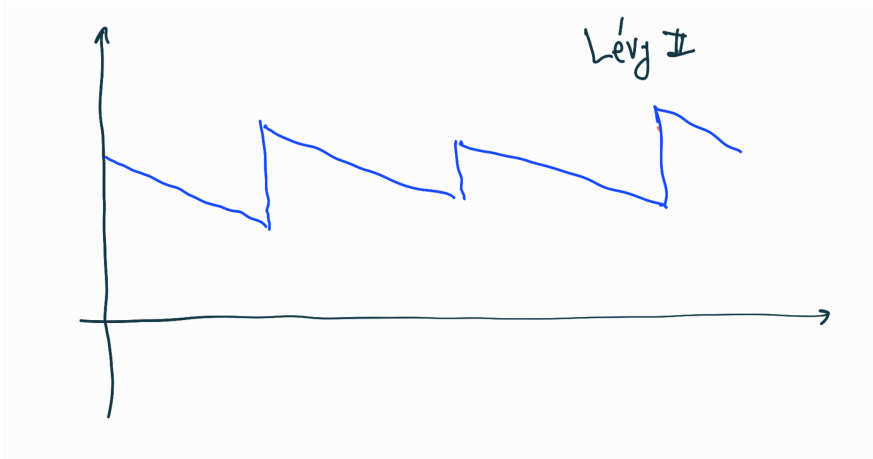
$$X_h - X_0, \quad \text{y} \quad X_{t+h} - X_t.$$

La ley del proceso se determina mediante

$$\mathbf{E}\, e^{zX(1)} = \exp\left[az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_R \left(e^{zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{|x|<1}\right)\Pi(dx)\right]$$

Dos procesos de Lévy





- El primero modela evoluciones con rupturas (saltos)
- El segundo podría modelar un reservorio de agua (evaporación y lluvia)

Problemas

- Consideramos problemas de contorno
- tenemos formulaciones equivalentes:
  - Probabilísticos
  - En términos de EDP
  - Mediante funciones analíticas (xa Lévy)
- La solución, en general, involucra martingalas

Problema 1: de una barrera

- Probabilidad de que el proceso llegue a un nivel b:

$$\sigma(b) = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t \geq b\}$$

- Dado un tiempo geométrico o exponencial $e(q)$, independiente de X nos interesa

$$M_q = \max_{0 \leq t \leq e(q)} X_t, \quad M = \max_{t \geq 0} X_t.$$

- es equivalente a calcular

$$\mathbf{P}(\sigma(b) < e(q)) = \mathbf{P}(M_q \geq b).$$

Problema de una barrera

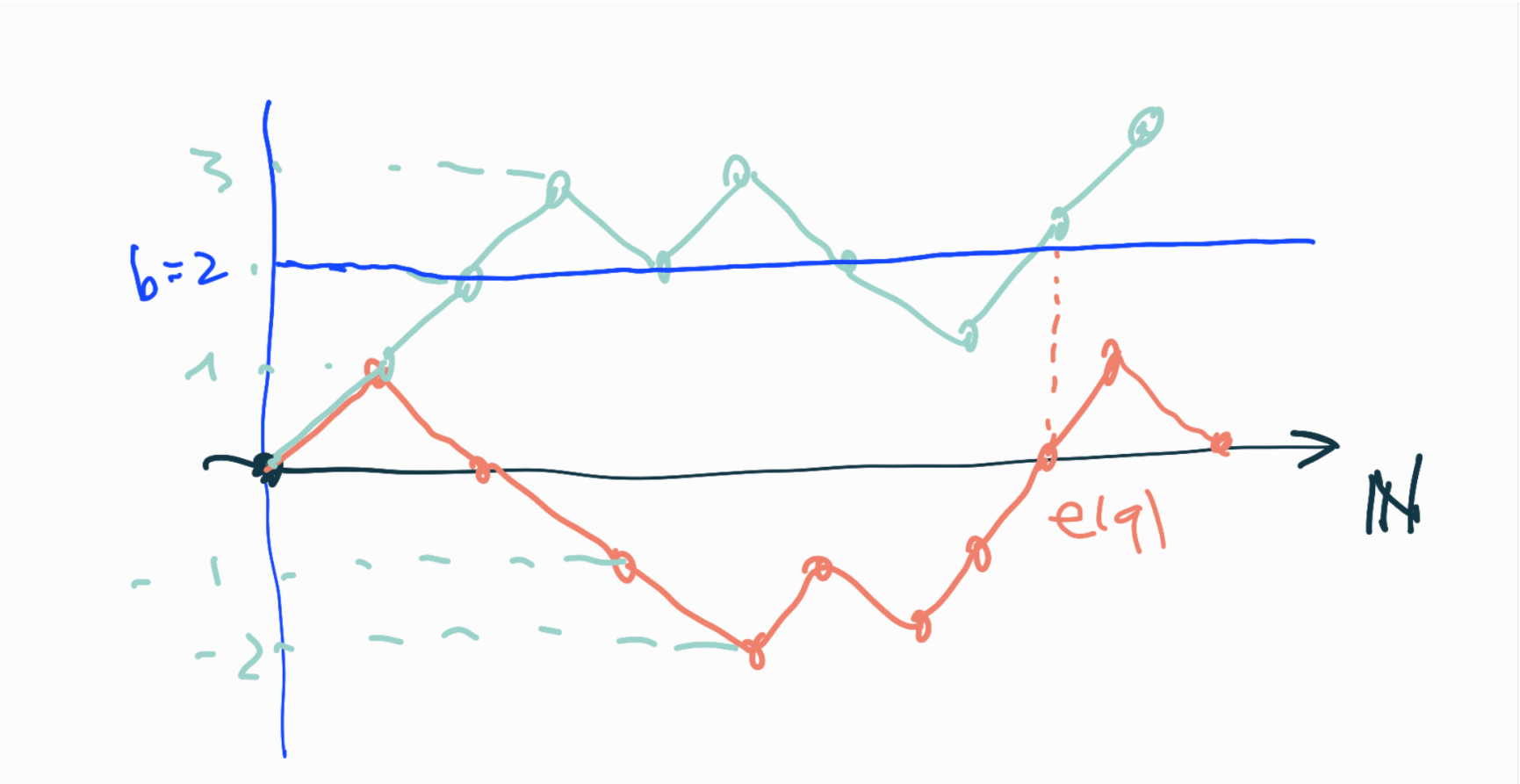


Figura: La barrera en el nivel $b = 2$

Problema 2: de dos barreras

- Dados $a < x < b$, definimos

$$\tau(a) = \text{ínf}\{t \geq 0 \colon X_t \leq a\}, \quad \sigma(b) = \text{ínf}\{t \geq 0 \colon X_t \geq b\}$$

- Calcular

$$\mathbf{P}(\tau(a) < \sigma(b))$$

- Que barrera visita primero el proceso

La ruina del jugador (Huygens, 1657)

- Dos participantes inician con un número finito de monedas o fichas,
- ejecutan partidas de un juego que no permite empates y en el que las probabilidades de ganar que tiene cada jugador permanecen constantes,
- el que gana entrega una ficha al otro
- el problema consiste en determinar la probabilidad de ruina que tiene cada jugador
- Huygens lo plantea con $p \neq 1/2$.

Problema de dos barreras

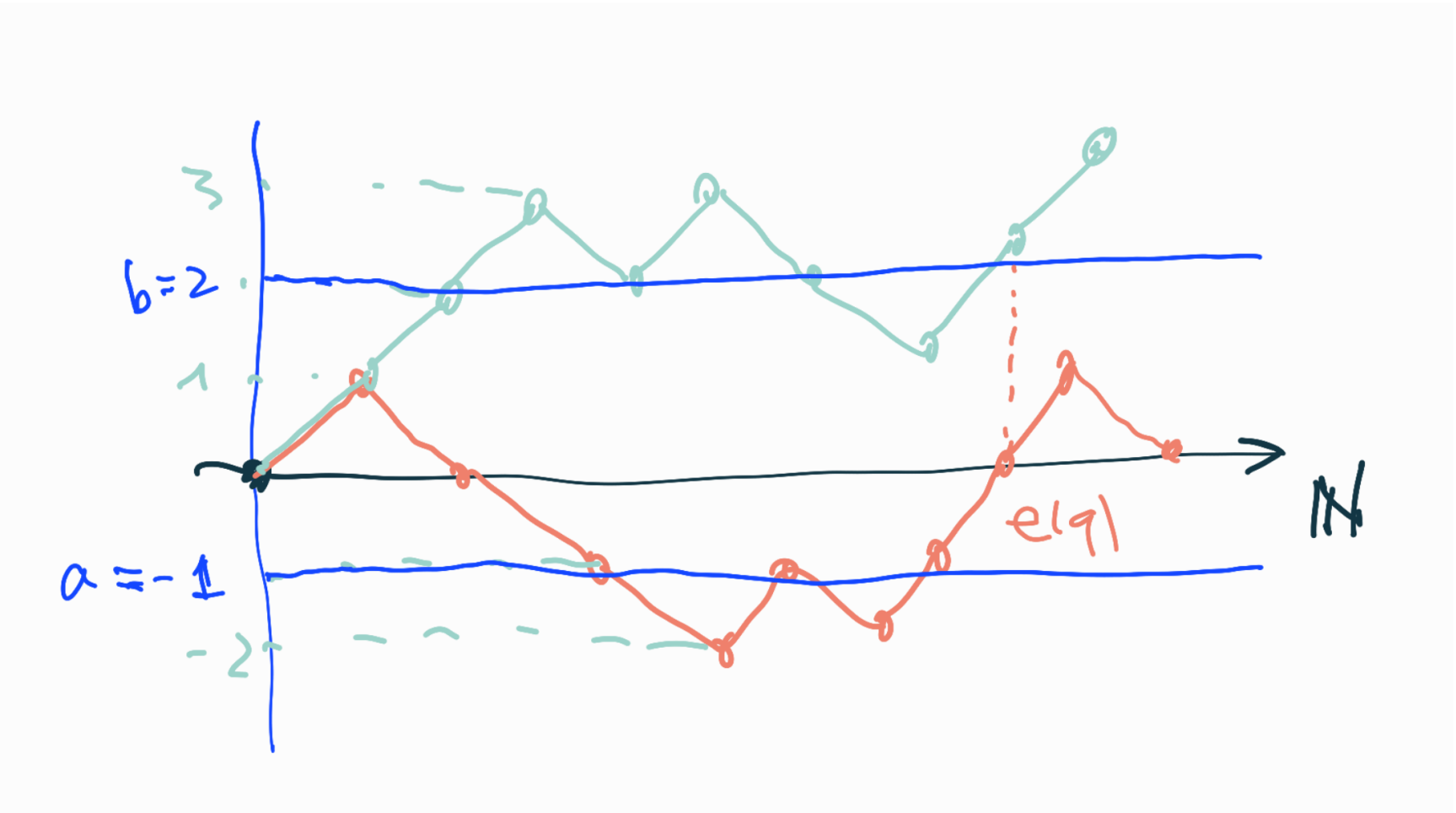


Figura: Las barreras en niveles $a = -1$ y $b = 2$

Martingala

Una martingala es un proceso $\{M_n\}$ tal que

$$\mathbf{E}(M_{n+1} \mid M_n, \ldots, M_1) = M_n.$$

Consecuencias:

- tiene esperanza constante en el tiempo

$$\mathbf{E}(M_1) = \mathbf{E}(M_n)$$

- (Doob) Detenido en un tiempo de la forma $T = \text{mín}(\tau(a), \sigma(b))$ conserva la esperanza:

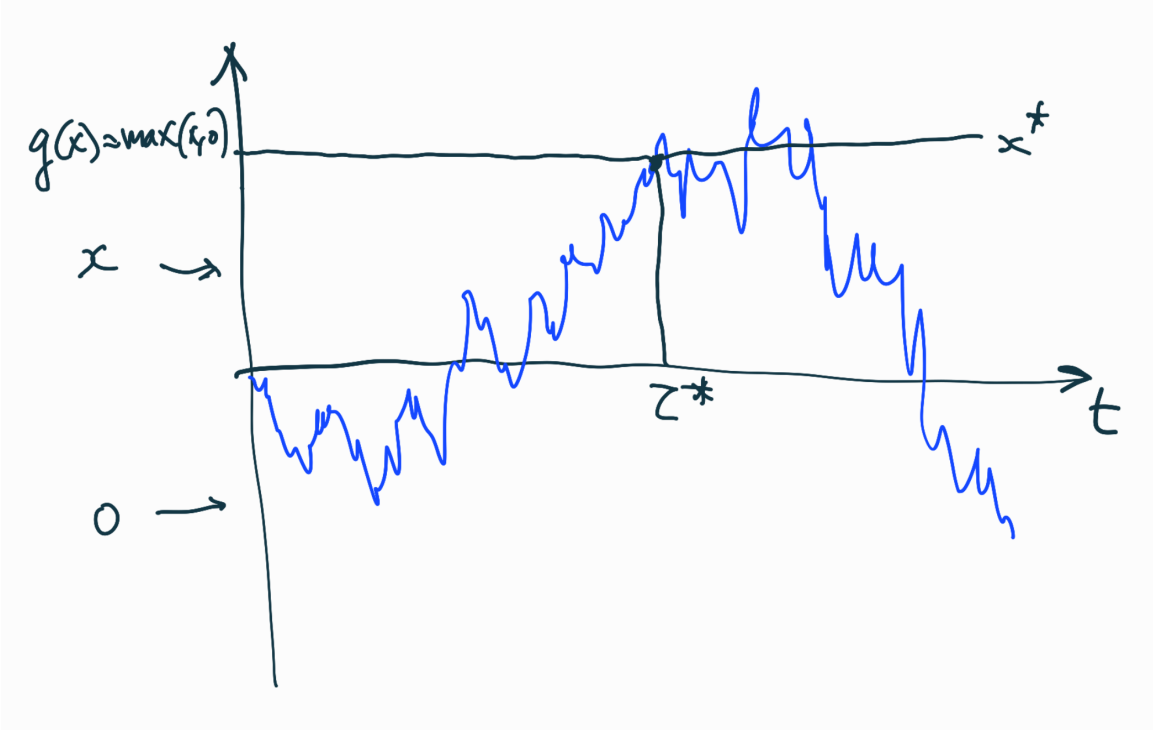
$$\mathbf{E}(M_1) = \mathbf{E}(M_T)$$

Problema 3: Parada óptima

- Dado
  - (A) un proceso estocástico $X = \{X_t : t \geq 0\}$,
  - (B) una función de pago continua $g(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$,
  - (C) un costo de observación $r > 0$.
- Encontrar
  - (I) $V(x)$: el *valor del juego*,
  - (II) τ^*: el *tiempo de parada óptimo*, tales que

$$\boxed{V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbf{E}_x \, e^{-r\tau} g(X_\tau) = \mathbf{E}_x \, e^{-r\tau^*} g(X^*_\tau)}$$

Parada óptima



- El proceso X es el Wiener
- La función de pago es $g(x) = \text{máx}(x, 0)$
- El nivel óptimo resulta ser $x^* = \frac{1}{\sqrt{2r}}$

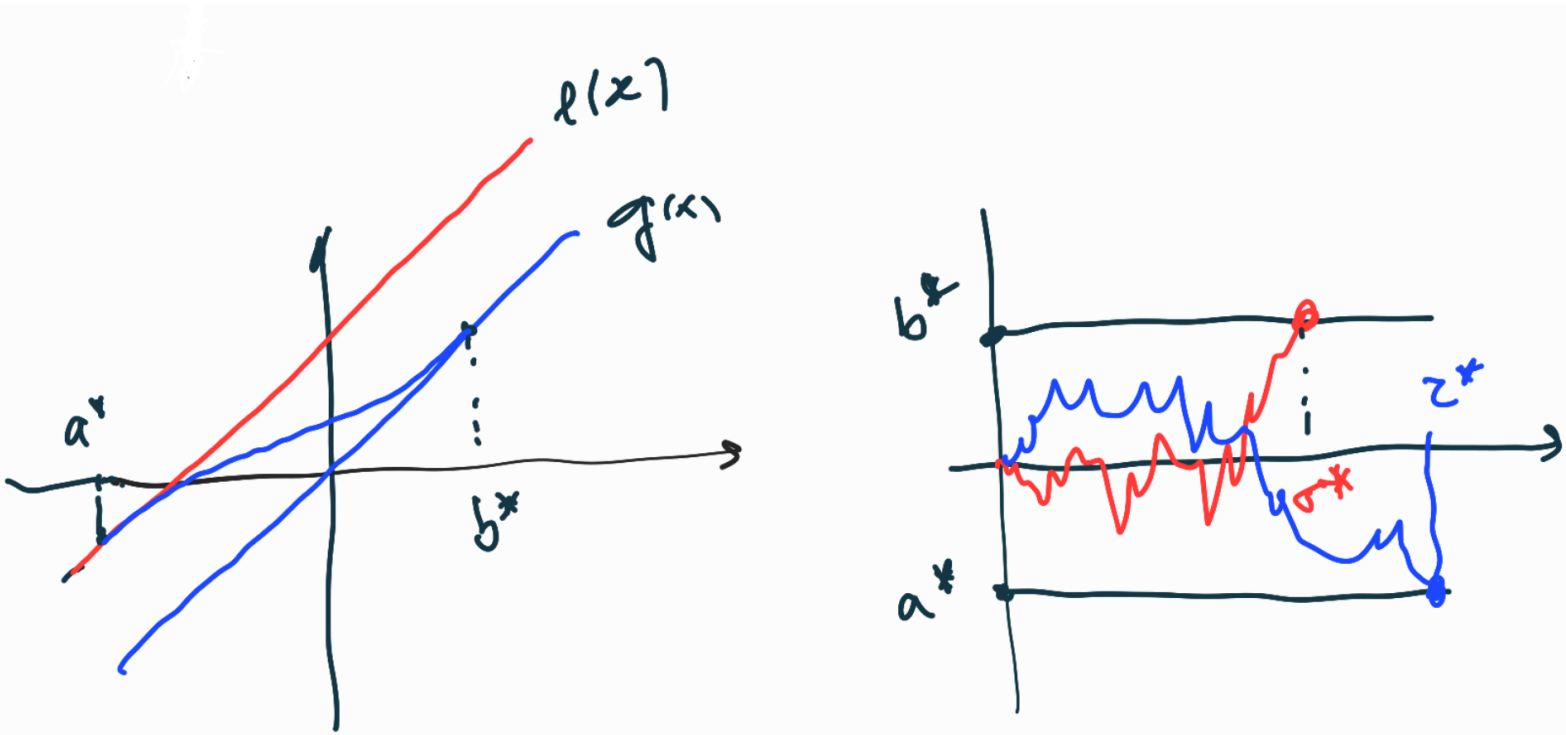
Problema 4: Juego de Dynkin

- Tenemos dos jugadores: Gulliver y el rey de Liliput.
- Gulliver para en τ y recibe $g(X_\tau)$
- El rey para en σ y recibe $\ell(X_\sigma)$
- Sea

$$M(x, \tau, \sigma) = \mathbf{E}_x \left[g(X_\tau) \mathbf{1}_{\{\tau < \sigma\}} + \ell(X_\sigma) \mathbf{1}_{\{\tau \geq \sigma\}} \right]$$

donde $g(x) < \ell(x)$.

Juego de Dynkin



- A la izquierda las funciones de pago. El rey ℓ paga una multa.
- A la derecha el desarrollo temporal.

Solución del Juego de Dynkin

- Demostrar un teorema Minimax:

$$\max_{\tau} \min_{\sigma} M(x, \tau, \sigma) = \min_{\sigma} \max_{\tau} M(x, \tau, \sigma)$$

- Hallar $V(x)$, τ^*, σ^* tales que

$$V(x) = \sup_{\tau} \inf_{\sigma} M(x, \tau, \sigma) = \inf_{\sigma} \sup_{\tau} M(x, \tau, \sigma) = M(x, \tau^*, \sigma^*)$$

- (τ^*, σ^*) es un *equilibrio de Nash*.

Problema 5: Control

Proceso controlado:

$$X^{D,U} = X - D + U$$

Los controles

$$\mathcal{A} = \{U, D, \text{adaptados, crecientes, cadlag}\}$$

Función objetivo

$$V(x) = \min_{(U,D)\in\mathcal{A}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbf{E}_x \left[\int_0^T c(X_t)dt + q_d D_T + q_u D_T \right]$$

Problema 6: Juego de campo medio

El jugador:

$$X^{D,U} = X - D + U$$

El mercado:

$$Y^{D,U} = Y - D_o + U_o$$

Los controles son iguales para ambos:

$$\mathcal{A} = \{U, D, \text{ adaptados, crecientes, cadlag}\}$$

Función objetivo

$$V(x, D, U, D_o, U_o)$$
$$= \min_{D \in \mathcal{A}} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \mathbf{E}_x \left[\int_0^T c(X_t, \mathbf{E}\, Y_t(D_o, U_o)) dt + q_d D_T + q_u D_T \right]$$

Equilibrios de Nash

- Las mejores estrategias son de barrera (es un teorema)
- Encontrar niveles (a, b) tales que

$$V(x, D_o, U_o, D_o, U_o) \leq V(x, D, U, D_o, U_o) \text{ para todo } U, D$$

- Moral: El jugador que entra en el mercado no tiene incentivo para jugar diferente que la política del mercado

Tabla de resumen

		Paseo al azar	Wiener	Difusión	Lévy
1	Una barrera				EM 2008
2	Dos barreras	Huygens 1657			
3	Parada óptima		Taylor 1968	Shiryaev 2008	EM 2002
4	Juego Dynkin			Álvarez 2008	L. Aspirot, A. Sosa
5	Control óptimo			Álvarez 2018, F. Oliú 2023	F. Oliú
6	Campo medio			F. Oliú 2023	

El problema de dos barreras (solución)

Partimos de $x = 0$, y tomamos $-a < 0 < b$ enteros

- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ es una martingala
- $\{S_n\}$ es una martingala
- El teorema de Doob nos dice que si

$$T = \text{mín}(\tau(a), \sigma(b))$$

donde

$$\tau(a) = \text{ínf}\{n \geq 0 \colon S_n = -a\}$$

se cumple

$$\mathbf{E}\, S_T = 0.$$

- Pero

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{E}\, S_T &= \mathbf{E}\, S_{\tau(a)} \mathbf{1}_{\tau(a)<\sigma(b)} + \mathbf{E}\, S_{\sigma(b)} \mathbf{1}_{\sigma(b)<\tau(a)} \\ &= -a\ \mathbf{E}\, \mathbf{1}_{\tau(a)<\sigma(b)} + b\ \mathbf{E}\, \mathbf{1}_{\sigma(b)<\tau(a)} \\ &= -a\ \mathbf{P}(\tau(a) < \sigma(b)) + b\ \mathbf{P}(\sigma(b) < \tau(a)). \end{aligned}$$

- Además

$$\mathbf{P}(\tau(a) < \sigma(b)) + \mathbf{P}(\sigma(b) < \tau(a)) = 1$$

- Entonces

$$\mathbf{P}(\tau(a) < \sigma(b)) = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbf{P}(\sigma(b) < \tau(a)) = \frac{a}{a+b}.$$

Tiempo continuo

- Los problemas en tiempo continuo tienen se resuelven también con martingalas
- Usamos herramientas de cálculo estocástico para difusiones
- Usamos herramientas analíticas (como variable compleja) para Lévy

Referencias I


Hald, Anders.
A history of probability and statistics and their applications before 1750. Wiley, New York, 1990. (Problema de Huygens 1657)


Taylor, H. M.,
Optimal stopping in a Markov process, Ann. Math. Statist., 39, (1968)


Shiryaev, A.N.
Optimal Stopping Rules. New York Heidelberg: Springer 1978.


Lewis, A., Mordecki, E.
Wiener-Hopf factorization for Lévy processes with negative jumps with rational transforms. *Journal of Applied Probability, Vol 45, Nr. 1.* (2008),

Referencias II


Mordecki, E.,
Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes., Finance Stoch., **6(4)** 473–493, (2002).


Alvarez, L.H.R.
A Class of Solvable Stationary Singular Stochastic Control Problems (2018).
`https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.03464`


Christensen, S., Mordecki, E. and Oliú Eguren, F.
Two sided ergodic singular control and mean field game for diffusions. *arXiv* (2023) DOI: 10.48550/arXiv.2306.09263



¡Muchas gracias!