MODELOS ESTOCÁSTICOS

EN FINANZAS

Ernesto Mordecki

http://www.cmat.edu.uy/~mordecki
mordecki@cmat.edu.uy
Facultad de Ciencias
Montevideo, Uruguay.

Primer Encuentro Regional de

Probabilidad y Estadística Matemática

Buenos Aires, 30/9 al 2/10 de 2004

Plan

1. Bonos, acciones opciones y su valuación
2. Modelos en tiempo discreto
3. La fórmula de Cox-Ross-Rubinstein
4. Modelo de Black-Scholes
5. Primer variación: difusiones
6. Segunda variación: procesos de Lévy
7. Opciones americanas para procesos de Lévy
8. Problema de la ruina para procesos de Lévy

1. Bonos, acciones, opciones y su valuación

El modelo más simple de un mercado financiero incluye dos posibilidades de inversion primaria, dos *activos*:

- Un *bono* es una opción de inversión cuyo precio es *determinístico*

- Una *acción* tiene un precio que evoluciona aleatoriamente

Es usual designar mediante B_t y S_t a los precios de un bono y una acción (bond - stock) en el instante t.

Opciones

En el modelo anterior se introduce un tercer activo llamado *opción*, que es un acuerdo realizado entre dos partes en $t = 0$ en la cual una se compromete a vender una unidad de S (una acción) a la otra parte, en el tiempo T a precio K acordado.

- *Lanzador* es quien emite la opción.

- *Poseedor, tenedor (holder)* es quien compra la opción.

- T es el *tiempo de ejercicio o maduración* de la opción.

- K es el *precio de ejercicio de la opción*

- $(S_T - K)^+$ se llama *premio* de la opción

- El activo S sobre el cual se realiza la opción se llama *subyacente*.

Es equivalente pensar, que el compromiso consiste en pagar al poseedor $S_T - K$ si esta cantidad es positiva, o cero en caso contrario. Se pagaría entonces

$$(S_T - K)^+ = \text{máx}(S_T - K, 0).$$

Se puede pensar también que

- Una opción es un *seguro* contra el evento que el precio S_T supere un determinado valor K.

- Una opción es una *apuesta*: Apuesto a que S_T supera K, y gano la diferencia.

Otras opciones

Mas en general, el compromiso puede suponer en pagar una cantidad dependiente de S_T, que notaremos $f(S_T)$.

Opciones de venta (put options)

Supongamos ahora, que el lanzador se compromete a *comprar* en T una acción a precio K. Esta opción, llamada europea de compra (put option) es equivalente a la anterior, con la diferencia de que el premio es $(K - S_T)^+$.

Opciones americanas

Las opciones americanas introducen en el contrato la siguiente variante:

- El poseedor puede reclamar la compra (venta) de la acción en cualquier momento entre 0 y T. Es decir, permiten el *ejercicio anticipado*

Valuación.

Problema: Cuanto vale ese tercer activo "derivado", es decir, cuanto pagará el tenedor de la opción por el derecho que ha adquirido.

En el caso europeo debemos calcular el precio

En el caso americano debemos calcular el precio y el momento de ejercicio

2. Modelos en tiempo discreto

El modelo Cox-Ross-Rubinstein.

El modelo de mercado financiero que consideramos tiene $T + 1$ períodos, $t = 0, 1, \ldots, T$ y consta de dos activos:

- $B_t = B_{t-1}(1 + r), \qquad B_0 = 1,$

  con r tasa de interés.

- $S_t = S_{t-1}(1 + \rho_t), \qquad S_0 = x,$

  con ρ_t v.a.i.i.d.

  $$\rho_t = \begin{cases} u & \text{con probablidad} \quad p \\ d & \text{con probablidad} \quad 1 - p \end{cases}$$

  donde $-1 < d < r < u$ y $p \in (0, 1)$.

3. La fórmula de Cox-Ross-Rubinstenin

Problema (Valuación): cuanto pagará el tenedor de la opción por el derecho que ha adquirido.

Solución: Construyo un portafolio con a_t bonos y b_t acciones, de forma que se verifiquen dos condiciones:

1. El portafolio sea *autofinanciante*: sólo se "cambia" entre B y S.

2. El portafolio *replica* de la opción:

$$X_T = a_T B_T + b_T S_T = (S_T - K)^+.$$

Si existe tal portafolio, el *precio racional* de la opción es su costo inicial

Solución con $T = 1$

Veamos cuanto vale V en función de u, d, r, K. Comenzamos con 2 períodos, es decir $T = 1$.

Replicar: si S sube debo pagar U, si baja, D.

En $t = 0$ compro a bonos y b acciones. En tiempo $T = 1$, el portafolio valdrá:

$$\begin{cases} (1+r)a + bx(1+u) & = & U \text{ si sube} \\ (1+r)a + bx(1+d) & = & D \text{ si baja} \end{cases}$$

despejando a, b, el valor de la opción es

$$\begin{aligned} V(x,1) = a + bx &= \frac{1}{1+r}[Up^* + D(1-p^*)] \\ &= \frac{1}{1+r} E^*(f(S_1)) \end{aligned}$$

donde

$$p^* = \frac{r-d}{u-d}$$

Comentarios

- El precio no depende del retorno esperado p, sino de p^* la *probablidad libre de riesgo*. (inesperado en Black-Scholes)

- p^* es tal que
$$E^* \frac{S_1}{(1+r)} = S_0 = x$$
(propiedad de *martingala*)

- Si S toma 3 valores tenemos un sistema incompatible, y el mercado es *incompleto*,

- *Arbitraje.* Un precio distinto del obtenido produce arbitraje (ganancia positiva con probabilidad positiva).

$T+1$ períodos

Existe un portafolio replicante de la opción, con premio f. Su precio resulta ser

$$V(x,T) = \frac{1}{(1+r)^T} E^* f(S_T)$$

Explícitamente si $f(x) = (x-K)^+$ con

$$\mathbf{B}(j,T,p) = \sum_{k=j}^{T} C_k^T p^k (1-p)^{T-k}$$

las probabilidades binomiales, tenemos

$$V(x,T) = x\mathbf{B}(k_0,T,\tilde{p}) - \frac{K}{(1+r)^T}\mathbf{B}(k_0,T,p^*)$$

donde

$$k_0 = \inf\left\{k \geq \frac{\log(K/(x(1+a)^T))}{\log((1+a)/(1+b))}\right\}$$

$$\tilde{p} = \frac{1+u}{1+r}p^*, \quad p^* = \frac{r-d}{u-d}$$

Este resultado fue obtenido por Cox, Ross y Rubinstein (1976).

4. Modelo de Black-Scholes

En 1900, L. Bachelier introdujo un modelo del movimiento Browniano (observado en la naturaleza por Brown en 1826) para modelar las fluctuaciones de la bolsa parisina.

El movimiento Browniano o proceso de Wiener en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso aleatorio, $W = (W_t)_{\{t \geq 0\}}$ tal que

- Sus trayectorias son continuas.

- Sus incrementos son independientes.

  Si $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, entonces

  $$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  son variables aleatorias independientes.

- $W_0 = 0, \quad W_t - W_s$ es una variable normal con media cero y varianza $t - s$, es decir

  $$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

El modelo de Black y Scholes

El modelo tiene tiempo continuo $t \geq 0$ y

- $B_t = e^{rt}$
- $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + W_t\}$

donde

- μ es el *retorno medio* del activo con riesgo,
- σ la *volatilidad*

Fórmula de Black-Scholes

Los argumentos para obtener el precio de una opción europea en el modelo de Black-Schoes son herramientas del *cálculo estocástico*:

- La *integral estocástica* que permite modelar los portafolios de bonos y acciones

- La *fórmula de Itô*, que permite “calcular”

- El *teorema de Girsanov* permite identificar la medida libre de riesgo.

El resultado, obtenido en 1973 por Black y Scholes, y también por Merton, es:

$$V(x,T) = x\Phi(x_1) - e^{-rT}K\Phi(x_0)$$

con

$$\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log \tfrac{x}{Ke^{-rT}} - \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \\ x_1 &= x_0 + \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

es la distribución normal estándar.

Observación: Es posible mediante el Teorema Central del Límite obtener esta fórmula a partir de la de CRR de las probabilidades binomiales.

5. Primer variación: difusiones

Veremos dos generalizaciones básicas del movimiento browniano:

- Las *difusiones*: conservan la **continuidad** de las trayectorias, y no las propiedades de incrementos independientes y estacionarios

- Los *procesos de Lévy*: conservan las propiedades de los **incrementos independientes y estacionarios** y tienen trayectorias discontinuas

Una *difusión* (X_t) es la solución de una *ecuación diferencial estocástica*, de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

donde

$$\int_0^t \sigma(X_s)dW_s = P - \text{lím} \sum_i \sigma(X_{s_i})[W_{s_{i+1}} - W_{s_i}]$$

Si a y σ son constantes

$$X_t = at + \sigma W_t,$$

es un browniano con tendencia.

Tenemos

$$S_t = S_0 \exp(X_t),$$

y en este contexto se generaliza la solución de Black-Scholes que da el precio de una opción.

6. Segunda variación: Procesos de Lévy

Es un proceso (X_t) que verifica

- $X_0 = 0$,
- Para $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, las variables aleatorias
$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$
son independientes
- sus incrementos son *estacionarios*
$$X_{t+h} - X_t \sim X_h$$

El modelo con $S_t = S_0 \exp(X_t)$ produce un mercado incompleto.

Fórmula clave: (Lévy-Kinchine)

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

donde

$$\psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy)$$

a, $\sigma \geq 0$ son reales, Π es una medida positiva en $\mathbf{R} - \{0\}$ tal que $\int (1 \wedge y^2)\Pi(dy) < +\infty$,

Ejemplo: Browniano con tendencia

Si $X_t = at + \sigma W_t$ obtenemos

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

con

$$\psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2$$

Es decir, la fórmula de L-K con $\Pi = 0$.

Veamos un ejemplo con $\Pi \neq 0$.

Ejemplo: Proceso de Poisson Compuesto

Consideramos el proceso

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

donde (N_t) es un proceso de Poisson, e (Y_k) son v.a.i.i.d, con una distribución F. Resulta

$$\psi(z) = \lambda \int (e^{zy} - 1) F(dy),$$

por lo que concluímos que $\Pi(dy) = \lambda F(dy)$.

En matemática actuarial se utiliza el modelo

$$X_t = x + at - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

y se pretende calcular

$$R(x) = P(\exists t \geq 0\colon X_t \leq 0) = P(I \leq -x)$$

7. Opciones americanas para procesos de Lévy

Teorema. El precio de una opción americana perpetua de venta, en un mercado con tasa de interés r, para un activo gobernado por un proceso de Lévy X es

$$V(S_0) = \frac{E[KEe^I - S_0 e^I]^+}{Ee^I},$$

y el ejercicio óptimo es

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \leq KEe^I\}$$

donde

$$I = \inf_{0 \leq t \leq \tau(r)} X_t$$

es el ínfimo del proceso hasta el instante $\tau(r)$. El tiempo $\tau(r)$ es una variable aleatoria exponencial, independiente de X (EM - F&S 2002).

Comentarios

El resultado anterior reduce el cálculo de un problema de parada óptima al de la determinación de la distribución de M.

Un teorema análgo vale para las opciones de compra, donde aparece el supremo en vez del ínfimo

Se vinculan así dos teorías:

- *matemática financiera* que calcula precios de opciones
- *matemática actuarial* que calcula *probabilidades de ruina*, o distribuciones del ínfimo.

8. Problema de la ruina para procesos de Lévy

Problema: determinar clases para Π que permitan calcular la distribución de I en forma exacta.

Una solución:

$$\Pi(dy) = \begin{cases} \Pi^+(dy), & \text{arbitraria, si } y > 0 \\ \Pi^-(dy) = \lambda\alpha e^{\alpha y} dy & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

tiene como solución

$$R(x) = A_1 \exp(-\alpha_1 x) + A_2 \exp(-\alpha_2 x)$$

donde α_1 y α_2 son las raíces de $\psi(z) = 0$ (EM - TPA (2003)).

Current: tomar $\Pi^-(dy)$ con transformada de Fourier racional.