PROBLEMAS DE BARRERA EN PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Ernesto Mordecki

http://www.cmat.edu.uy/~mordecki

mordecki@cmat.edu.uy

Facultad de Ciencias

Montevideo, Uruguay.

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral

IMAL - Santa Fé, Argentina - 24/9/2004

Plan

1. El problema y el modelo matemático
2. La ruina del jugador
3. Proceso de Wiener
4. Problema de barrera en difusiones
5. Procesos de Lévy
6. Problema de la ruina para Procesos de Lévy

1. Problema y modelo

Queremos calcular las siguientes probabilidades:

- de que un precio alcance un determinado valor
- de que un puente se inunde
- de que una compañia de seguros se arruine
- de que una central telefónica se sature
- $\cdots$

En todos los casos anteriores reconocemos:

- Un escenario de *incertidumbre*, o *imprevisibilidad*, que evoluciona *temporalmente*

Damos respuesta a estas preguntas en el marco de la *teoria de la probabilidad*, que nos permite *cuantificar* la incertidumbre, y cuando tenemos una estructura temporal subyacente, utilizamos los *procesos estocásticos* que nos permiten modelar la *evolución temporal* de esta incertudumbre.

Para esto consideramos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con P medida de probabilidad (positiva, finita, de masa total uno) y un conjunto de funciones medibles $X_t \colon \Omega \to R$, donde $t \in I$, con I un intervalo real (el "tiempo", discreto o continuo).

El problema de barrera consiste en calcular

$$P\Big(\max_{t\in T} X_t \geq x\Big)$$

Es equivalente a

- Calcular la distribución del *máximo* del proceso:

$$M_T = \max_{t\in T} X_t,$$

- Calcular la *probabilidad de ruina*:

$$R(x) = P(\exists t \in T \colon x + X_t < 0)$$

- Hallar $P(\tau < \infty)$ cuando

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \geq x\}$$

primer tiempo de llegada a un nivel dado.

2. La ruina del jugador

Consideramos una sucesión Y_k de variables aleatorias independientes, que toman dos valores cada una, con probabilidades p y $1-p$ (con $0 < p < 1$), digamos

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p \\ -1, & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

El *paseo al azar simple* es el proceso estocástico de tiempo discreto

$$X_0 = 0, \qquad X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$$

Problema de barrera: calcular

$$f_{0b} = P(\exists n\colon X_n = b)$$

la *probabilidad de alcanzar la barrera* $b > 0$.

Para $a < 0$ sea

$$\alpha(i) = P(\exists n\colon i + X_n = b; X_m > a, m = 0, \ldots, n-1).$$

la *probabilidad de alcanzar la barrera de nivel* b *antes que la de nivel* a, (problema de dos barreras), saliendo de i.

Es un juego de apuestas sucesivas, entre dos jugadores A y B, llamado la *ruina del jugador*:

A tiene un capital $-a$; B, un tiene b. Si $\{Y_1 = 1\}$ gana A, y recibe 1 de B (lo contrario si $Y_1 = -1$);

El capital de A será $S_n - a$, el de B, $b - S_n$, luego de la n–ésima apuesta.

El capital total, $S_n - a + b - S_n = b - a$ es constante.

La cantidad $\alpha(0)$ que queremos calcular, es la probabilidad de que el jugador B pierda el juego, y se arruine.

Aplicando la fórmula de la probabilidad total:

$$\alpha(i) = p\alpha(i+1) + q\alpha(i-1).$$

Entonces, la sucesión $\{\alpha(i)\}$ verifica, si $a < i < b$, una ecuación en diferencias finitas. Como $\alpha(a) = 0$, y $\alpha(b) = 1$, si $p \neq q$

$$\alpha(i) = \frac{(q/p)^i - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}, \quad i = a, a+1, \dots, b.$$

Podemos entonces, calcular f_{0b} tomando límite, si $a \to -\infty$. Si $p < q$

$$f_{0b} = \lim_{a \to -\infty} \frac{1 - (q/p)^b}{(q/p)^b - (q/p)^a} = \left(\frac{p}{q}\right)^b.$$

Si $p = q = 1/2$,

$$\alpha(i) = \frac{i-a}{b-a} \quad i = a, a+1, \dots, b. \tag{1}$$

Si $p \geq q$, tomando límite si $a \to -\infty$

$$f_{0b} = P_0(\exists n \geq 0 \colon X_n = b) = \lim_{a \to -\infty} \alpha(0) = 1.$$

Conclusión:

- Si $p < q$, tenemos $f_{0b} = (p/q)^b$

  (probabilidades geométricas)

- Si $p \geq q$, tenemos $f_{0b} = 1$

  (siempre se alcanza la barrera).

3. Movimiento Browniano o Proceso de Wiener

El movimiento Browniano o Proceso de Wiener es un proceso estocástico (W_t) que verfica:

- La función $W_t(\omega)$ es *continua* para cada ω al variar t

- Para $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, las variables aleatorias

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  son independientes

- sus incrementos son *homogéneos* y tienen distribución gaussiana:

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

Recordar: X tiene distribución gaussiana; ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) si su distribución es

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

Se puede construir (Wiener):

Dadas (X_n) v.a.i.i.d. normales $(0,1)$

$$W_t(\omega) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n\geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt}{t} X_k(\omega)$$

Veremos dos generalizaciones básicas del movimiento browniano:

- Las *difusiones*, que conservan la **continuidad** de las trayectorias, y no conservan las propiedades de incrementos independientes y homogéneos

- Los *procesos de Lévy*, que conservan las propiedades de los **incrementos independientes y estacionarios** y tienen trayectorias discontinuas

3. Difusiones

Una *difusión* (X_t) es la solución de una *ecuación diferencial estocástica*, de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

donde

$$\int_0^t \sigma(X_s)dW_s = P - \text{lím} \sum_i \sigma(X_{s_i})[W_{s_{i+1}} - W_{s_i}]$$

Obs:

$$E \int_0^t \sigma(X_s)dW_s = 0$$

Hay teoremas de existencia y unicidad. Si a y σ son constantes

$$X_t = at + \sigma W_t,$$

es una difusión con tendencia.

($\exp(at + \sigma W_t)$ es el modelo del precio de las acciones en Black-Scholes)

Fórmula de Itô:

Para f de clase C^2 es clave la siguiente "regla de la cadena":

$$
\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) = &\int_0^t f'(X_s)dX_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma^2(X_s)ds
\end{aligned}
$$

que nos permite resolver el problema de barrera para (X_t), con $t \geq 0$.

Solucion del problema de barrera:

$$P(\max_{t\geq 0} X_t \geq x_0) = B(0),$$

donde la función $B(x)$ verifica

$$(LB)(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)B''(x) + a(x)B'(x) = 0,$$
$$B(x_0) = 1$$

Si a, σ son constantes:

$$B(x) = \exp\Big(-\frac{2a}{\sigma^2}(x_0 - x)\Big).$$

Recordar: La solución del problema de la ruina es $\alpha(0)$ donde $\alpha(i)$ era solución de una ecuación en diferencias.

Idea de la demostracion: Por Itô, aplicado en τ el primer momento en que X_t llega a x_0

$$B(X_\tau) - B(0) = \int_0^\tau \Big[\frac{1}{2}\sigma^2 B''(X_s) + aB'(X_s)\Big] ds + \int_0^\tau \sigma B'(X_s) dW_s.$$

Aquí

- $EB(X_\tau) = EB(X_\tau)\mathbf{1}(\tau < \infty)$

  $+EB(X_\tau)\mathbf{1}(\tau = \infty) = P(\tau < \infty)$

- $E\int_0^\tau \sigma B'(X_s) dW_s = 0$

Conclusión

$$P(\text{máx}\, X_t \geq x_0) = P(\tau < \infty) = B(0) = \exp\Big(-\frac{2a}{\sigma^2}x_0\Big).$$

Podemos decir que el máximo

$$M = \sup_{t\geq 0} X_t,$$

tiene distribucińn exponencial (antes era geométi-ca).

4. Procesos de Lévy

Es un proceso (X_t) que verifica

- $X_0 = 0$,

- Para $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, las variables aleatorias

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

  son independientes

- sus incrementos son *homogéneos*

$$X_{t+h} - X_t \sim X_h$$

Fórmula clave: (Lévy-Kinchine)

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

donde

$$\psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy)$$

a, $\sigma \geq 0$ son reales, Π es una medida positiva en $\mathbf{R} - \{0\}$ tal que $\int (1 \wedge y^2)\Pi(dy) < +\infty$,

Ejemplo:

Si $X_t = at + \sigma W_t$ obtenemos

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

con

$$\psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2$$

Es decir, la fórmula de L-K con $\Pi = 0$. Observemos que la raíz de $\psi(z) = 0$ es $-2a/\sigma^2$

Veamos más ejemplos con $\Pi \neq 0$.

Procesos de Poisson

Si $T_1, T_2, \ldots$ son v.a.i.i.d. con parámetro λ

$$N_t = \inf\{k \colon T_1 + T_2 + \ldots T_k \leq t\}.$$

es un proceso de Poisson. Resulta que

$$\psi(z) = \lambda(e^z - 1),$$

lo que corresponde a $\Pi(dy) = \delta_1(dy)$.

Procesos de Poisson Compuestos

Consideramos el proceso

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

donde (N_t) es un proceso de Poisson, e (Y_k) son v.a.i.i.d, con una distribución F. Resulta

$$\psi(z) = \lambda \int (e^{zy} - 1) F(dy),$$

por lo que concluímos que $\Pi(dy) = \lambda F(dy)$.

En matemática actuarial se utiliza el modelo

$$X_t = x + at + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

y se pretende calcular

$$R(x) = P(\exists t \geq 0 \colon X_t \leq 0)$$

6. Probabilidad de Ruina para un P-L

En su forma más general, un proceso de Lévy es una suma (que puede ser infinita) de procesos como los anteriores. Por ejemplo, si (W_t), (N_t), (Y_k) son independientes el proceso

$$X_t = at + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

es un proceso de Lévy (llamado *difusión con saltos*), con

$$\psi(z) = az + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda \int (e^{zy} - 1) F(dy)$$

Problema: determinar clases para Π que permitan calcular $R(x)$ en forma exacta.

Una solución:

$$\Pi(dy) = \begin{cases} \Pi^{+}(dy), & \text{arbitraria, si } y > 0 \\ \Pi^{-}(dy) = \lambda\alpha e^{\alpha y} dy & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

tiene como solución

$$R(x) = A_1 \exp(-\alpha_1 x) + A_2 \exp(-\alpha_2 x)$$

donde α_1 y α_2 son las raíces de $\psi(z) = 0$ (EM - TPA (2003)).

Current: tomar $\Pi^{-}(dy)$ con transformada de Fourier racional.

Problema abierto: dos barreras para procesos de Lévy