¿Puede dar pérdida un Casino?

por Ernesto Mordecki*†

En esta nota calculamos la probabilidad de que pierda la banca en la ruleta, en un período dado de tiempo. Nuestro enfoque consiste en determinar cuantas veces debe rodar la bola para que esta probabilidad sea despreciable. En los calculos incluímos costos operativos, y llegamos a la siguiente conclusión: *Si en los Casinos de Montevideo funcionan a diario 10 mesas de ruleta, durante 8 horas, tirandose 24 bolas por hora, y con una apuesta media de una ficha por pleno, asumiendo ademas que los costos de funcionamiento son la mitad de la ganancia esperada por la banca, la probabilidad de que los casinos den pérdida en un período de un mes es despreciable (menor que un milésimo).*

1 Introducción

Consideramos entonces un casino funcionando, con 10 mesas de ruleta, durante 8 horas por día, tirándose 24 bolas por hora. Del punto de vista matemático separamos el análisis en tres etapas:

- Que ocurre cuando se apuesta una ficha
- Cual es el comportamiento esperado de la ganancia de la banca, al acumularse las tiradas
- Cuan probable es un desvío de este comportamiento, para dar pérdida (ganancia negativa).

*Prof. Agregado del Centro de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de la República. e-mail: mordecki@cmat.edu.uy

†Agradezco los comentarios de Gonzalo Perera y Mario Wschebor. El contenido de la nota es de mi entera responsabilidad.

Aplicamos luego este análisis en dos situaciones: al tener una apuesta fija por bola tirada, y al tener una apuesta variable, presentando las conclusiones. En el apéndice mostramos los cálculos detallados y las referencias bibliográficas.

Antes de concluír esta introducción digamos que estos cálculos están motivados por las pérdidas que sufrieron los Casinos de Montevideo en el último perído de cuatro años, y, que en la nota no se pretende modelar lo que ocurre con todos los juegos de azar que los casinos ofrecen, sino apenas ilustrar los principios que rigen los juegos de azar, con el análisis de la ruleta, agregando además que los mismos principios rigen para todos los juegos de azar en los que la banca tiene prioridad a la hora de repartir los premios.

2 Apuesto una ficha

Supongamos que un jugador apuesta una ficha, ficha que de aquí en más será nuestra unidad de medida. Luego de tirar la bola, la banca obtiene una ganancia[1]

$$G = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 36/37 \\ -35 & \text{con probabilidad } 1/37 \end{cases}$$

La ganancia esperada de la banca debida al azar, que simbolizamos $\mathbf{E}\,G$ se calcula promediando los montos a ganar por las probabilidades de ganarlos, es decir

$$\mathbf{E}\,G = -35 \times \frac{1}{37} + 1 \times \frac{36}{37} = \frac{1}{37}$$

Si c es el costo de tirar la bola, la ganancia esperada por la banca (en el supuesto ideal de que se apueste una sola ficha) es

$$\mathbf{E}\,G - c = \frac{1}{37} - c$$

3 Ganacia media en tiradas múltiples

Supongamos entonces que el casino esta funcionando, y para fijar ideas, que se apuesta una sola ficha por tirada[2]. Si $G_1, \dots, G_N$ son las ganancias

[1] Para el cálculo se utiliza la regla "casos favorables sobre casos posibles"

[2] Luego veremos un modelo más realista.

de la banca en las N tiradas (que dependen del azar), y c son los costos operativos por cada bola tirada, la "ley de los grandes números" afirma que los promedios de las ganancias se aproximan, cuando la cantidad de tiradas crece, a la ganancia esperada en una tirada. En otros términos

$$\frac{G_1 - c + \cdots + G_N - c}{N} \sim \mathbf{E}\, G - c = \frac{1}{37} - c.$$

De aquí concluimos que la ganancia es aproximadamente $N(1/37 - c)$ y obtenemos la primer conclusión: *para que la banca gane los costos operativos no pueden superar la ganancia esperada debida al azar.* En nuestro caso debe verificarse $c < 1/37$.

4 Desvíos de la ganancia media

Para analizar cuanto puede desviarse esta ganancia promedio de la ganancia esperada, utilizamos el "teorema de los grandes desvíos", que afirma que la probabilidad de desvío de un promedio de su valor esperado decrece exponencialmente. Más precisamente, nos interesa calcular la probabilidad de que la ganancia sea negativa, y el teorema nos dice

$$\mathbf{P}\Big(\frac{G_1 - c + \cdots + G_N - c}{N} < 0\Big) < \exp\big(-Nh\big),$$

donde h es una constante que se determina en función de las distribución de las apuestas por tirada, distribución que suponemos constante.

5 Conclusiones

Comencemos estableciendo que consideramos despreciable una probabilidad menor que 10^{-3} es decir, un milésimo. Para tener una dimensión del tamaño de esta probabilidad, observamos que $10^3 \sim 2^{10}$. Esto nos dice que un milésimo es la probabilidad de tirar 10 veces sucesivas una moneda y obtener las diez veces el mismo resultado. Por ejemplo, obtener diez caras al tirar diez veces una moneda.

Presentamos entonces las conclusiones de la aplicación del teorema de los grandes desvíos en dos situaciones.

La primera es la descrita, en la cual se apuesta una ficha por tirada que abreviamos como "apuesta fija".

Una mejor aproximación a lo que sucede en una mesa de ruleta, consiste en modelar las apuestas en forma aleatoria, distribuída sin preferencias entre los 37 números. Como veremos este supuesto, que llamamos "apuesta variable", hace menor el plazo en el que el Casino reduce su probabilidad de pérdida a menos de un milésimo, al tener en cuenta el efecto de promediación entre las apuestas de los jugadores en una misma tirada. Para hacer los cálculos incluyendo costos operativos, suponemos que estos costos son la mitad de la ganacia esperada.

Las conclusiones son:

- Si suponemos que en cada tirada se apuesta únicamente una ficha a un pleno, elegido al azar, tenemos una probabilidad de pérdida despreciable cuando:
  - se tiran 650000 bolas, lo que da aproximadamente un año, en el supuesto de no tener costos (o que estos son despreciables).
  - se tiran 2500000 (dos millones y medio de bolas) cuando el costo operativo es la mitad de la ganancia esperada del casino. Esta cantidad de bolas equivale a 4 años de funcionamiento.
- Si suponemos que se apuesta una cantidad variable de fichas en cada pleno, para que la probabilidad de pérdida de la banca sea despreciable, tenemos:
  - que tirar 17500 bolas, cuando asumimos que no hay costos de funcionamiento (o que estos son despreciables). Esto equivale a 10 días.
  - que tirar 70000 bolas, asumiendo que el costo de funcionamiento es la mitad de la ganancia esperada. Esto corresponde a un lapso de 36 días.

A modo de conclusión agregamos que: (1) a nuestro entender, el último de los cálculos realizados (apuesta variable con costos) es el que mejor se ajusta a la realidad, resultando despreciable la probabilidad de que las ruletas de los casinos den pérdida en el período de un mes; (2) Aún en el caso hipotético de apuestas fijas, teniendo costos de funcionamiento, la probabilidad de pérdida en un período de cuatro años es insignificante. En las siguientes secciones presentamos el detalle de los cálculos realizados.

6 Cálculos con apuesta fija

Suponemos entonces que en cada tirada se apuesta una ficha a un pleno.

Queremos calcular la probabilidad de que la ganancia acumulada en el casino sea negativa, es decir, que el casino, efectivamente, tenga pérdida. Sean entonces $G_1 + \cdots + G_N$, la ganancia acumulada debido al azar. Los costos serán Nc. Suponemos que las tiradas son uniformes en los 37 resultados posibles e independientes. En otros términos, queremos calcular

$$\mathbf{P}(G_1 + \cdots + G_N - Nc < 0) = \mathbf{P}\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G_k - c < 0\Big).$$

El Teroema de los Grandes Desvíos[3] establece que

$$\mathbf{P}\Big(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G_k - c < 0\Big) < \exp\big(-Nh\big),$$

donde

$$h = \frac{35+c}{36}\log\frac{37(35+c)}{36^2} + \frac{1-c}{36}\log\frac{37(1-c)}{36}$$

6.1 Apuesta fija sin costos

Para formarnos una idea de las cantidades involucradas en las fórmulas anteriores, supongamos en primera instancia que no tenemos costos operativos (o que estos son despreciables) es decir $c = 0$. Resulta entonces

$$h = 0.0000106216 \sim 10^{-5}.$$

Luego, para que la probabilidad de pérdida sea menor que un milésimo, precisamos que $\exp\big(-Nh\big) = 1/1000$, es decir

$$N = h^{-1}\log(1000) = 650351.$$

Si como supusimos se tiran 1920 bolas por día tenemos 338 días, aproximadamente un año[4].

[3] Ver por ejemplo “Large Deviations Techniques and Applications” por Dembo y Zeitoni Springer (1998), Teorema 2.2.30

[4] Una aproximación más precisa, debida a Bahadur-Rao (ver op.cit.) reduce este lapso, aproximadamente, a las dos terceras partes.

6.2 Apuesta fija con costos

Suponemos ahora que hay costos, más precisamente, que estos costos son la mitad de la ganancia esperada. Esto nos da $c = 1/74$. Resulta entonces

$$h = 2.67 \times 10^{-6}$$

por lo que

$$N = h^{-1} \log(1000) = 2.59 \times 10^{6}$$

En términos de días, esto representa 1349 días, aproximadamente 4 años.

7 Apuesta variable

Como dijimos, una mejor aproximación a lo que sucede en una mesa de ruleta, consiste en modelar las apuestas en forma aleatoria, distribuída sin preferencias entre los 37 números.

Supongamos entonces que en cada tirada se apuesta a cada pleno una cantidad variable, independiente para cada pleno, que modelamos con una distribución de Poisson de parámetro 1. La ganancia debida al azar del casino en una tirada es

$$G = X_1 + \cdots + X_{36} - 35X_0$$

siendo $X_0, \dots, X_{36}$ variables aleatorias independientes con distribución de Poisson. La ganacia total, como antes, es $G - c$. Si $G_1, \dots, G_N$ registran las ganancias debidas al azar en las tiradas sucesivas, queremos calcular como antes

$$\mathbf{P}(G_1 + \cdots + G_N - Nc < 0).$$

Aplicamos nuevamente el teorema de los grandes desvíos, para obtener

$$\mathbf{P}(G_1 + \cdots + G_N - cN < 0) \leq \exp\big(- hN).$$

La constante h en este caso se calcula como

$$h = -\log \mathbf{E}\, e^{\theta(c+P)} = -\theta c - (e^{35\theta} - 1) - 36(e^{-\theta} - 1),$$

donde θ es la raíz de la ecuación

$$c + 35e^{35\theta} - 36e^{-\theta} = 0.$$

7.1 Apuesta variable sin costos

Como antes suponemos primero que $c = 0$. Obtenemos entonces que $\theta = (1/36)\log(36/35) = 0.000782524$. Al sustituir obtenemos

$$h = 0.000392996 \sim 4 \times 10^{-4}.$$

Esta cantidad es un orden mayor que la anterior. Esto nos da para la cantidad de bolas

$$N = h^{-1}\log(1000) = 17577$$

Con el mismo supuesto para la cantidad de mesas, resultan 10 días.

7.2 Apuesta variable con costos

La ganancia esperada del casino por tirada es en este modelo

$$\mathbf{E}\,G - c = \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_{36}) - 35\,\mathbf{E}\,X_0 - c = 1 - c$$

Suponemos como antes que los costos son la mitad de la ganacia esperada debida al azar, es decir $c = 1/2$. Debemos entonces hallar θ que verifique

$$\frac{1}{2} + 35e^{35\theta} - 36e^{-\theta} = 0.$$

nos da un valor $\theta = 0.000393864$. Sustituyendo

$$h = -\frac{1}{2}\theta - (e^{35\theta} - 1) - 36(e^{-\theta} - 1) = 0.0000986855 \sim 10^{-4}$$

Esto nos da una cantidad de bolas

$$N = h^{-1}\log(1000) = 69997$$

Con el mismo supuesto para la cantidad de mesas, resultan ser 36 días.