Ejercicios para entregar

Pablo Lessa

10 de octubre de 2014

Para la aprobación del curso deben entregar los siguientes ejercicios por correo electrónico. No solamente no está prohibido consultar libros y discutir con colegas sino que es altamente recomendado. Se puede, y se recomienda, realizar los ejercicios en grupo y entregar un solo texto realizado por todo el grupo.

El primer ejercicio, llamado Lema de Borel-Cantelli, fué usado en la demostración de la ley de grandes números. Intuitivamente dice que no podemos darle infinitas capas de pintura a una pared si solo disponemos de un litro de pintura.

Ejercicio 1 (Borel-Cantelli)**.** *Sea μ una probabilidad en Ω y A_n una familia de Borelianos tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Entonces se cumple

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para infinitos } n\}\right) = 0.$$

Recordemos que una transformación $T : X \to X$ preserva una medida μ si para todo Boreliano $A \subset X$ se cumple $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Es decir la medida de los que caen en A al aplicar T es igual a la medida de A. Con esta hipótesis el teorema de recurrencia de Poincaré dice que la medida de los que alguna vez (aplicando algún T^n) caen en A es igual a la medida de los que caen infinitas veces en A. Vale la pena dedicar un buen rato a pensar en la demostración.

Ejercicio 2 (Recurrencia de Poincaré)**.** *Mostrar que si T preserva una probabilidad μ en un espacio métrico separable y completo X y A es un Boreliano con $\mu(A) > 0$ entonces se cumple*

$$\mu\left(\{x \in X : T^n(x) \in A \text{ para infinitos } n\}\right) = \mu\left(\bigcup_n T^{-n}(A)\right).$$

Deducir la descomposición en ciclos de las permutaciones a partir de este resultado (llamado el teorema de recurrencia de Poincaré).

En la clase sobre Google PageRank y cadenas de Markov definimos dada una probabilidad p en un conjunto finito X y una matriz de transición $(q(x,y))_{x,y\in X}$

de probabilidades de transición que cumple $q(x,y) \in [0,1]$ para todo $x, y \in X$ y $\sum_y q(x,y) = 1$ para todo $x \in X$, una probabilidad $\mu_{p,q}$ en $X^{\mathbb{N}}$. Las medidas de los cilindros están dadas por

$$\mu_{p,q}([x_1, \ldots, x_n]) = p(x_1)q(x_1, x_2) \cdots q(x_{n-1}, x_n).$$

En las medidas así obtenidas no son invariantes respecto al shift $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ definido por $\sigma(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Sin embargo para cada matriz de transición q existe una probabilidad p tal que la correspondiente $\mu_{p,q}$ es shift invariante. Esto es un resultado sobre matrices de $n \times n$ y vectores propios llamado el Teorema de Perron-Frobenius.

Ejercicio 3 (Teorema de Perron-Frobenius)**.**

1. *Demostrar que toda matriz de $n \times n$ con entradas no negativas A existe un vector v con entradas no negativas que es vector propio de A.*

2. *Demostrar que para todo conjunto finito X y toda matriz de transición $(q(x,y))_{x,y \in X}$ tal que $q(x,y) \in [0,1]$ para todo $x, y \in X$ y $\sum_y q(x,y) = 1$ para todo $x \in X$, existe una probabilidad p en X tal que $\mu_{p,q}$ es shift invariante en $X^{\mathbb{N}}$.*

Recordemos que la entropía de una probabilidad μ en un conjunto finito X se define como

$$H(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x) I(\mu(x)),$$

donde $I(p) = -\log_2(p)$ para todo $p \in [0,1]$. La siguiente propriedad fué utilizada en la demostración del teorema de codificación de Shannon.

Ejercicio 4. *Sea μ una probabilidad en un conjunto finito X y $p : X \to [0,1]$ tal que $\sum_x p(x) \leq 1$, demostar que $H(\mu) \leq \sum_{x \in X} \mu(x) I(p(x))$.*