El Teorema de Recurrencia de Poincaré

Pablo Lessa

9 de octubre de 2014

1. Recurrencia de Poincaré

1.1. Fracciones Continuas

Supongamos que queremos expresar la relación que existe entre los números 127 y 101. Una forma es simplemente dar la fracción 127/101. Otra forma es dar la expansión decimal $127/101 = 1{,}2574257425742574\ldots$. Pero hay otra forma que tiene una historia de más de dos mil años, usando división con resto (i.e. división Euclídea) repetidas veces.

La idea es notar que $127 = 1 \cdot 101 + 26$ es decir 101 entra una vez en 127 y sobran 26. Ahora comparamos el resto 26 con 101, obteniendo $101 = 3 \cdot 26 + 23$. Repitiendo el procedimiento de comparar el nuevo resto con el más pequeño obtenemos $26 = 1 \cdot 23 + 3$, y $23 = 7 \cdot 3 + 2$, y $3 = 1 \cdot 2 + 1$, y finalmente $2 = 2 \cdot 1$. La lista de cocientes obtenidos determinan la fracción 127/101 así que escribimos

$$127/101 = [1; 3, 1, 7, 1, 2].$$

Le llamamos a $[1; 3, 1, 7, 1, 2]$ una fracción continua finita (es sólo una lista finita de naturales, asumo que son todos no nulos excepto posiblemente el primero).

Ejercicio 1. *¿Cómo se calcula la fracción que representa una fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$? Demostrar que cada fracción continua finita representa un racional positivo y que cada racional positivo es es representado por exactamente dos fracciones continuas finitas relacionadas por ser una de la forma $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ para $a_n \geq 2$ y la otra $[a_0; a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$.*

¿Qué sentido tiene una fracción continua infinita? Bueno, la definimos simplemente como limite

$$[a_0; a_1, \ldots] = \lim_{n \to +\infty} [a_0; a_1, \ldots, a_n].$$

Ejercicio 2. *Mostrar que el límite anterior existe. Mostrar que cada fracción continua infinita representa un número irracional positivo y que cada irracional positivo es representado por una única fracción continua infinita.*

Un teorema que no sé demostrar pero que me resulta divertido es que e (la base del logaritmo natural) cumple

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots].$$

Ejercicio 3. *Mostrar que $x = [1; 1, 1, \ldots]$ cumple la ecuación $x^2 = x + 1$. Deducir que $x = (1 + \sqrt{5})/2$.*

Vamos a demostrar el siguiente teorema debido a Khinchin.

Teorema 1 (Khinchin)**.** *Sea m la distribución uniforme en $[0, 1]$. Entonces para m casi todo $x \in [0, 1]$ (i.e. para todo x en un Boreliano de m-medida 1) se cumple*

$$\lim_{n \to +\infty} (a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\log_2(k)} \approx 2{,}68545 \cdots$$

donde $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$.

1.2. El mapa de Gauss

Definimos el mapa de Gauss $T : [0, 1] \to [0, 1]$ como 0 si $x = 0$ y si no $T(x) = 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$ donde $\{u\}$ es redondear u para abajo a un entero (por ejemplo $\lfloor 1{,}99 \rfloor = 1$). Por otro lado definimos $f : [0, 1] \to \mathbb{N}$ a través de $f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

Escribimos T^n para los iterados de T, i.e. $T^2(x) = T(T(x)), T^3(x) = T(T(T(x)))$, etc.

Ejercicio 4. *Probar que si $x \in [0, 1]$ es irracional entonces*

$$x = [0; f(x), f(T(x)), f(T^2(x)), \ldots, f(T^n(x)), \ldots].$$

Ejercicio 5. *Graficar T, f, y T^2 (más o menos).*

1.3. La probabilidad invariante

Definimos μ_T la única probabilidad en $[0, 1]$ tal que

$$\mathbb{E}_{\mu_T}(f) = \frac{1}{\log(2)} \int_0^1 f(x) \frac{1}{1 + x} \mathrm{d}x$$

para toda función continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. *Mostrar que $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ para todo Boreliano $A \subset [0, 1]$.*

1.4. Objetos básicos de la teoría ergódica

En mi opinión los objetos básicos de la teoría ergódica son, un espacio métrico separable y completo X, una probabilidad μ en X, y una función medible $T : X \to X$ que deja μ invariante (i.e. $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo Boreliano $A \subset X$).

La observación básica es que el hecho de que T deja μ invariante implica cierta recurrencia de las órbitas de T (i.e. las sucesiones $x, T(x), T^2(x), \ldots$ donde $x \in X$). Esto en el fondo es una consecuencia del principio del palomar (infinitas cosas en finito espacio implica mucho solapamiento).

Ejercicio 7 (Descomposición en ciclos de una permutación)**.** *Mostrar que toda permutación se descompone en ciclos. Es decir si $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ es biyectiva entonces para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene $\pi^j(k) = k$ para cierto j.*

Ejercicio 8 (Recurrencia de Poincaré)**.** *Mostrar que si T preserva una probabilidad μ en un espacio métrico separable y completo X y A es un Boreliano con $\mu(A) > 0$ entonces se cumple*

$$\mu\left(\{x \in X : T^n(x) \in A \text{ para infinitos } n\}\right) = \mu\left(\bigcup_n T^{-n}(A)\right).$$

Deducir la descomposición en ciclos de las permutaciones a partir de este resultado (llamado el teorema de recurrencia de Poincaré).

1.5. Fracciones continuas chuecas

Digamos que un irracional $x \in [0, 1]$ tiene fracción continua chueca si algún número natural n sólo aparece finitas veces en la fracción continua $[0; a_1, a_2, \ldots]$ de x.

El teorema de recurrencia de Poincaré ¿Alcanza para demostrar que los x con fracción continua chueca tienen medida nula para μ_T (y por lo tanto también para Lebesgue)?

Analicemos la situación. Tomamos $A = (1/2, 1]$ que son aquellos $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ con $a_1 = 1$. El teorema de Poincaré nos dice que

$$\mu_T\left(\{x \in [0, 1] : T^n(x) \in A \text{ para infinitos } n\right) = \mu_T\left(\bigcup_n T^{-n}(A)\right),$$

pero **no tenemos garantías que el lado derecho sea igual a** 1.

Definición 1 (Ergodicidad)**.** *Una transformación medible T que preserva una probabilidad μ en algún espacio métrico separable completo X se dice que es ergódica (también se dice que μ es una medida ergódica para T) si todo Boreliano invariante tiene probabilidad 0 o 1. Es decir si $A \subset X$ es un Boreliano y $T^{-1}(A) = A$ entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.*

Los sistemas ergódicos son aquellos que no se pueden partir en dos.

Ejercicio 9. *Demostrar que una permutación* $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ *es ergódica para la medida de conteo normalizada si y solamente si es un ciclo de longitud* n*.*

1.6. Ergodicidad del mapa de Gauss

Demostraremos que la probabilidad μ_T es ergódica para la transformación de Gauss T. Como consecuencia inmediata de este hecho y del teorema de recurrencia de Poincaré se obtiene que los $x \in [0, 1]$ cuya fracción continua es chueca tienen μ_T-medida nula.

Una primera observación que será útil es que la medida μ_T puede reemplazarse por la medida de Lebesgue m en $[0, 1]$ cometiendo un error multiplicativo acotado. En particular μ_T y m comparten los mismos conjuntos de medida nula (y en consecuencia los mismos conjuntos de medida 1).

Ejercicio 10. *Para todo Boreliano* $A \subset [0, 1]$ *se cumple* $\frac{1}{2\log(2)} m(A) \leq \mu_T(A) \leq \frac{1}{\log(2)} m(A)$*.*

Llamemos átomo de nivel n a los intervalos en $[0, 1]$ formados por puntos x tales que los primeros n coeficientes de su fracción continua coinciden. Los átomos de nivel 1 con $(1/2, 1], (1/3, 1/2], \ldots$. Es importante observar que T^n mapea cada átomo de nivel n biyectivamente sobre todo el intervalo $[0, 1)$ y que T^n es derivable en cada átomo.

La siguiente observación se basa en que $|T^2(x)|$ es mayor a una constante mayor que 1 en todos los $x \in [0, 1]$ en los que existe.

Ejercicio 11. *Existe una constante* $\lambda < 1$ *tal que para todo* n *y todo átomo* B *de nivel* n *se cumple* $m(B) \leq \lambda^n$*.*

El punto clave para mostrar la ergodicidad es el siguiente 'argumento de distorsión'.

Lema 1 (Control distorsión)**.** *Existe una constante* $C > 0$ *tal que si* x *e* y *pertenecen al mismo átomo de nivel* n *entonces*

$$|\log\left(|(T^n)'(x)/(T^n)'(y)\right)| \leq C.$$

Demostración. Fijemos $g(x) = \log(|T'(x)|)$. En cualquier átomo de nivel 1 se calcula $g(x) = -2\log(x)$ y $g'(x) = -2/x$. Por lo tanto se obtiene para cualquier par x, y en el mismo átomo $[1/(1 + f(x)), 1/f(x))$ que

$$|\log(T'(x)) - \log(T'(y))| \leq 2(1 + f(x))|x - y| = 2|x - y| + 2f(x)|x - y|.$$

Ahora supongamos que x e y están en el mismo átomo de nivel $n \geq 1$. Usando lo anterior y la regla de la cadena se obtiene

$$|\log\left((T^n)'(x)\right) - \log\left((T^n)'(y)\right)| \leq 2\sum_{k=0}^{n-1} |T^k(x) - T^k(y)| + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x))|T^k(x) - T^k(y)|.$$

El primer término es menor o igual a la serie $2\sum \lambda^k = 2/(1-\lambda)$ (donde λ está dado por el ejercicio 11).

Cada sumando del segundo término $f(T^k(x))|T^k(x) - T^k(y)$ lo acotamos según dos casos. Si $f(T^k(x)) \leq \lambda^{-(n-k)/2}$ entonces el término es menor o igual a $\lambda^{(n-k)/2}$ (de nuevo por el ejercicio 11). En caso contrario observamos que $T^k(x)$ y $T^k(y)$ están en el átomo $[1/(1+f(T^k(x))), 1/f(T^k(x)))$ y por lo tanto $|T^k(x) - T^k(y)| \leq 1/f(T^k(x))(1+f(T^k(x)))$ y por lo tanto el término $f(T^k(x))|T^k(x) - T^k(y)| \leq 1/f(T^k(x)) \leq \lambda^{(n-k)/2}$. De la discusión se obtiene que

$$|\log((T^n)'(x)) - \log((T^n)'(y))| \leq 2/(1-\lambda) + 2/(1-\sqrt{\lambda}) = C$$

siempre que x e y estén en el mismo átomo de cualquier nivel n. □

Con esto tenemos elementos suficientes para demostrar la ergodicidad.

Demostración de la ergodicidad de T respecto a μ_T. El punto clave está en usar el control de distorsión dado por el Lema 1 para mostrar que si A es un Boreliano cualquiera y B es un átomo de nivel n entonces

$$e^{-C}m(A)m(B) \leq m(T^{-n}(A) \cap B) \leq e^C m(A)m(B). \tag{1}$$

Una vez que se muestra el hecho anterior se aplica esto a un conjunto invariante A y una unión de átomos disjuntos B obteniendo $e^{-C}m(A)m(B) \leq m(A \cap B)$.

Tomando límite para una sucesión de uniones de átomos B que aproxima a $[0,1] \setminus A$ (de modo que $m(A \cap B) \to 0$) se obtiene $e^{-C}m(A)m([0,1] \setminus A) \leq 0$. De esto se obtiene que o bien $m(A) = 0$ o $m([0,1] \setminus A) = 0$ (en cuyo caso $m(A) = 1$), de lo cual se concluye que todo conjunto invariante A cumple $\mu_T(A) = 0$ o $\mu_T(A) = 1$.

Para demostrar la ecuación 1 nos basamos en el control de distorsión. Sea B un átomo de nivel n y A un conjunto cualquiera. Notemos que T^n mapea a B biyectivamente y diferenciablemente sobre $[0,1]$. Usando cambio de variable se obtiene

$$m(A) = \int_A 1 \mathrm{d}y = \int\limits_{T^{-n}(A) \cap B} |(T^n)'(x)| \mathrm{d}x.$$

Ahora como T^n es un difeomorfismo entre B y $[0,1)$ se tiene que en algún punto de B la derivada $(T^n)'$ vale exactamente $1/m(B)$ en valor absoluto. Usando el lema de distorsión se obtiene que

$$e^{-C}/m(B) \leq |(T^n)'(x)| \leq e^C/m(B)$$

para todo $x \in B$. Substituyendo en la integral para $m(A)$ se obtiene la ecuación 1. □

Ejercicio 12. *Demostrar que los $x \in [0,1]$ con fracción continua chueca tienen medida de Lebesgue nula.*

Ejercicio 13. *Demostrar que existe un conjunto de medida de Lebesgue 1 en $[0,1]$ tal que todo $x \in [0,1]$ cumple con lo siguiente: Toda sucesión finita de naturales $a_1, \ldots, a_n$ aparece infinitas veces en la fracción continua de x.*