

**Facultad de Ciencias. Centro de Matemática.**  
**Introducción a la Probabilidad y Estadística. 2003**

**Práctico 9**

1. Una partícula se mueve entre los estados 0,1,2, según una cadena de Markov cuya matriz de transición es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea  $Z_n$  la posición de la partícula en el  $n$ -ésimo movimiento. Calcular  $P(Z_n = 0 | Z_0 = 0)$  para  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

2. Consideremos el problema de enviar un mensaje binario, 0 o 1, a través de un canal que consta de varias etapas, donde la transmisión en cada etapa está sujeta a una probabilidad  $\alpha$  de error. Supongamos que la señal enviada es  $Z_0 = 0$ , y  $Z_n$  es la señal recibida en la etapa  $n$ -ésima. Asumimos entonces que  $Z_n$  es una cadena de Markov con distribución inicial  $\pi_0 = 1, \pi_1 = 0$ , y probabilidades de transición  $p_{00} = p_{11} = 1 - \alpha$  y  $p_{01} = p_{10} = \alpha$ .

- a) Hallar  $P(Z_0 = 0, Z_1 = 0, Z_2 = 0)$ , probabilidad de que no ocurran errores hasta el paso 2.
- b) Hallar la probabilidad de que en el paso 2 se reciba la señal correcta.

3. Determinar todas las clases irreducibles para una cadena de Markov con estados  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  cuya matriz de transición es

$$\begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}$$

4. Una cadena de Markov con estados  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  tiene la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 3^{-1} & 3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 3^{-1} \\ 2^{-1} & 4^{-1} & 4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4^{-1} & 4^{-1} & 4^{-1} & 0 & 0 & 4^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar qué estados son esenciales. ¿Hay alguno absorbente? Determinar qué estados son recurrentes y cuáles transitorios.

5. Una cadena de Markov con estados  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  tiene la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 & 2^{-1} & 0 & 0 \\ 2^{-1} & 0 & 2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 & 2^{-1} & 0 & 0 \\ 4^{-1} & 4^{-1} & 0 & 0 & 4^{-1} & 4^{-1} \\ 6^{-1} & 6^{-1} & 6^{-1} & 6^{-1} & 6^{-1} & 6^{-1} \end{pmatrix}$$

Hallar las clases irreducibles. Clasificar los estados en transitorios y recurrentes.

6. Hallar el período de una cadena de Markov irreducible cuya matriz de transición es:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 2^{-1} & 2^{-1} & 0 \\ 4^{-1} & 0 & 0 & 3/4 \\ 2^{-1} & 0 & 0 & 2^{-1} \\ 0 & 2^{-1} & 2^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{-1} & 0 & 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & 2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Un tablero tiene 9 casilleros dispuestos en 3 filas y 3 columnas. Se mueve una ficha en dicho tablero según una cadena de Markov, de modo que la ficha se puede mover de un casillero a cualquiera de los casilleros vecinos (en forma horizontal, vertical o diagonal) con probabilidades iguales. Dada la simetría del problema, consideramos solamente 3 estados: Centro, Esquina y Otros.

- a) Hallar las probabilidades de transición de esta cadena. Mostrar que la cadena es irreducible y aperiódica, y encontrar la distribución estacionaria.
- b) Estudiar la cadena que resulta de plantear el problema en el caso de que los movimientos en diagonal no estén permitidos.

8. Una cadena de Markov tiene la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasificar los estados, y estudiar el comportamiento límite de  $p_{ij}^{(n)}$ .

9. La probabilidad de llegada de un cliente a un comercio en el período de un minuto es  $1/5$ , y la probabilidad de que un cliente atendido se vaya durante un minuto es  $1/2$ . Representamos la cantidad de clientes en el comercio con una cadena de Markov, ( $Z_n$  representa la cantidad de clientes que hay al final del minuto  $n$ ). Mostrar que la distribución estacionaria es  $\frac{6}{5}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, (\frac{1}{4})^2, (\frac{1}{4})^3, \dots)$ . ¿Qué ocurre si el modelo es modificado de modo que no puede haber más de 5 clientes en el comercio?
10. Se considera una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Hallar los valores y vectores propios de  $P$ , y la descomposición  $P = BDB^{-1}$ , con  $D$  matriz diagonal y  $B$  invertible. (b) Calcular  $P^n$  y determinar el comportamiento asintótico de  $p_{jk}^n$ , si  $n \rightarrow \infty$ , para cada par de estados  $i, j$ .
11. Discutir la periodicidad de los estados, y determinar  $p_{jk}^n$  para todo  $n$ ,  $j$  y  $k$ . en una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$