

**Facultad de Ciencias. Centro de Matemática.
Introducción a la Probabilidad y Estadística. 2003**

Práctico 5

1. El vector aleatorio (X, Y) tiene distribución discreta, descrita en la siguiente tabla:

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	0.2	0	0.1	0
1	0.1	0.2	0.1	0
2	0	0.1	0.1	0.1

- (a) Hallar $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, y la función de distribución de la variable aleatoria X . (b) Calcular $P(Y = 0)$, $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$, $P(Y = 3)$ y hallar la función de distribución de la variable aleatoria Y . (c) ¿Son independientes X e Y ?
2. (*Problema de la aguja de Buffon.*) Se arroja al azar una aguja de longitud $2b$ sobre un plano en el que se han trazado líneas paralelas que distan $2a$ (con $a > b$). Supondremos que la distancia X del centro de la aguja a la línea más próxima y el ángulo agudo Y que forma la dirección de la aguja con la de las líneas son variables independientes, respectivamente uniformes en $[0, a]$ y $[0, \pi/2]$. Calcular la probabilidad de que la aguja corte a alguna línea. Proponer un método para obtener una aproximación de π .
3. Sea eligen al azar e independientemente dos valores B y C de $[0, 1]$, con distribución uniforme. Calcular la probabilidad de que el polinomio $x^2 + Bx + C$ tenga (a) raíces reales y distintas, (b) una raíz doble, (c) raíces imaginarias.
4. Las variables aleatorias X e Y son independientes, y tienen la misma densidad, exponencial de parámetro α . (a) Hallar la densidad de la variable aleatoria $X + Y$. (b) Hallar las densidades de las variables aleatorias $M = \max(X, Y)$, $m = \min(X, Y)$, y demostrar que $D = M - m$ es exponencial de parámetro α . (c) Calcular $P(X = Y)$ y $P(X \geq Y)$.
5. (a) Sean X e Y variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Hallar la densidad de $X + Y$. (b) Hallar la densidad de $X + Y + Z$ con (X, Y, Z) con densidad uniforme en el cubo $[0, 1]^3$. (c) ¿Que puede decir de la función densidad de la suma de n variables aleatorias independientes con densidad uniforme? ¿Es continua?, ¿hasta que orden es derivable?

6. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con idéntica distribución $F(x)$. Sea $m = \min(X_1, \dots, X_n)$ y $M = \max(X_1, \dots, X_n)$. (a) Calcular las distribuciones de M y m . (b) Calcular $P(x \leq m \leq M \leq y)$. (c) Si $F(x)$ es absolutamente continua con densidad $p(x)$ demostrar que m y M tienen distribución absolutamente continua y hallar las densidades respectivas.
7. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes, con distribución común $F(x)$ absolutamente continua, con densidad $p(x)$. Notamos $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ a las mismas variables ordenadas en forma creciente. Así, $X_{(1)}$ es el mínimo de las variables, $X_{(n)}$ es el máximo. (a) ¿Son independientes las variables $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$? Justifique su respuesta. (b) Mostrar que la probabilidad de que k de las n variables sean menores que x , y $n - k$ mayores que x es $\binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$, y deducir que $P(X_{(i)} \leq x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$, y que $X_{(i)}$ tiene densidad dada, para x real, por $f_{(i)}(x) = i \binom{n}{i} F(x)^{i-1} f(x) (1 - F(x))^{n-i}$.
8. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de parámetro α . Determinar la densidad de $X_1 + X_2$, $X_1 + X_2 + X_3$, y demostrar que la densidad de la suma $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ es $f_n(x) = \alpha^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}$.
9. *Proceso de Poisson*. Consideremos X_1, \dots, X_n, \dots variables aleatorias con distribución común exponencial de parámetro α , e tales que para todo n las n -úpladas X_1, \dots, X_n son independientes. Notemos $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, las sumas parciales. Definimos para cada $t \geq 0$, $N(t) = \text{card}\{k: S_k \leq t\}$ es decir, la cantidad de sumas parciales anteriores a t . (a) Graficar una función posible $N(t)$ al variar t . (b) Observando que $\{N(t) \geq k\} = \{S_k \leq t\}$, y utilizando el ejercicio anterior, escribir una fórmula mediante una integral para la probabilidad $P(N(t) \geq k)$. (c) Observando que $P(N(t) = k) = P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k - 1)$ y aplicando partes en la parte anterior deducir que $N(t)$ tiene distribución de Poisson, de parámetro que se determinará.
10. Sea (X, Y) un vector uniforme en el cuadrado $[0, 1]^2$. Sean $R = \sqrt{2 \ln(1/(1 - X))}$, $\theta = \pi(2Y - 1)$. (a) Mostrar que θ tiene distribución uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y que R tiene densidad dada por $p(r) = r e^{-\frac{r^2}{2}}$, $r \geq 0$. (b) Sean $Z = R \cos \theta$, $W = R \sin \theta$. Probar que Z y W son variables aleatorias independientes con distribución normal con parámetros $(0, 1)$.