

**Facultad de Ciencias. Centro de Matemática.
Introducción a la Probabilidad y Estadística. 2003**

Práctico 4

1. La variable aleatoria X tiene distribución discreta y toma los valores $0, 1, 2, 4$ siendo las probabilidades de estos valores $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$. Hallar la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria y dibujar su gráfico.
2. La variable aleatoria X tiene densidad $p(x) = ce^{-|x|}$. Calcular $P(X \leq 0)$, hallar el valor de la constante c , y calcular $P(0 \leq X \leq 1)$.
3. Se arroja sucesivamente una moneda y se describe los resultados por medio de los números U_1, U_2, \dots . Cuando en la n -ésima replicación el resultado es cara, ponemos $U_n = 1$; y en caso contrario, $U_n = 0$. Suponemos que en cada oportunidad, la probabilidad de obtener cara es $1/2$ y que las sucesivas replicaciones son independientes. Llamemos X al número cuya expresión en el sistema binario es

$$0.U_1U_2U_3 \cdots U_n \cdots,$$

o bien, de manera equivalente, $X = \sum_{n=1}^{\infty} U_n 2^{-n}$. Calcular: (a) $P(X \geq 1/2)$ (b) $P(X = 0)$ (c) $P(X = 1)$ (d) $P(j2^{-n} \leq X \leq k2^{-n})$ para $j \leq k \leq 2^n$. (e) $P(a \leq X \leq b)$ para $0 \leq a < b \leq 1$, como límite de probabilidades de intervalos de la parte (d) convenientemente elegidos.

4. (a) Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy, con densidad $p(x) = \frac{1}{c(1+x^2)}$. (a) Determinar la constante c . (b) Determinar un intervalo $I = [-H, H]$ tal que $P(X \in I) = 0.9$.
5. Sea $G(x)$ con $x \geq 0$ una función monótona decreciente, no nula, que cumple la ecuación funcional $G(x+y) = G(x)G(y)$, para todo $x \geq 0$, $y \geq 0$. (a) Demostrar que $G(x) = e^{-\alpha x}$ para algun $\alpha \geq 0$. (b) Demostrar que si una variable aleatoria T cumple la propiedad de *pérdida de memoria*, $P(T > t+s | T > t) = P(T > s)$, entonces tiene distribución exponencial.
6. En un esquema de Bernoulli, sea T la variable aleatoria que indica en número de experimentos que se realizan hasta obtener el primer éxito. (a) Calcular $P(T = k)$ para $k = 1, 2, \dots$. Se dice que T tiene *distribución geométrica* de parámetro p . (b) Demostrar que $P(T > m+n | T > m) = P(T > n)$, para m, n naturales arbitrarios. (c)

Sea X con distribución exponencial de parámetro α . Demostrar que $[T] + 1$ tiene distribución geométrica y calcular su parámetro.

7. (a) Sea X una variable aleatoria con distribución discreta, que toma los valores x_1, x_2, \dots . Sea $A_i = \{\omega: X(\omega) = x_i\}$, e $Y = \sum_i x_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$. Demostrar que $P(X = Y) = 1$. (b) Sea $X \geq 0$ una variable aleatoria. Definimos para cada n $X_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$ si $\frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}$ para $k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$, $X_n(\omega) = n$ si $X(\omega) \geq n$. Observar que X es una variable aleatoria discreta, y describir el conjunto de valores que toma. Demostrar, que para cada ω , $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. (c) Si $F_n(x)$ es la distribución de X_n , demostrar que $F_n(x) \rightarrow F(x)$ si $n \rightarrow \infty$.
8. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad donde $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es un conjunto finito. Notamos $p_k = P(\{\omega_k\}) \geq 0$ para $k = 1, \dots, n$. Se define la *entropía* de P como $H(P) = -\sum_{k=1}^n p_k \log p_k$ (convenimos $0 \log 0 = 0$). (a) Demostrar que $0 \leq H(P) < \infty$, y hallar P tal que $H(P) = 0$. (b) Sea P_0 la probabilidad tal que $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. Calcular $H(P_0)$ y demostrar que $H(P) \leq H(P_0)$ para toda P .
9. Supongamos que Ω es un conjunto de s símbolos de un cierto alfabeto, que p_k es la frecuencia de aparición del símbolo k -ésimo en un mensaje largo, que suponemos constante, y P es la probabilidad correspondiente. (a) Calcular la cantidad de mensajes de largo n que respetan las frecuencias anteriores, es decir, donde aparece $n_k = p_k n$ veces el símbolo k , para $k = 1, \dots, s$. (b) Sea $I(n)$ el largo mínimo necesario para codificar con dos valores (traducir a un “lenguaje” de dos símbolos) todos los mensajes calculados en (a). Demostrar mediante la fórmula de Stirling que $\frac{\log 2}{n} I(n) \sim H(P)$. ¿Cuándo un lenguaje es “más informativo”?
10. *Paradoja de Bertrand*. Sea \mathcal{C} la circunferencia de centro O y radio 1. Determinar la probabilidad de que una cuerda AB de esta circunferencia elegida “al azar” sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscrito en los siguientes casos: (a) Fijamos un punto I en \mathcal{C} elegimos un punto M del segmento OI con distribución uniforme, y le asociamos la cuerda AB perpendicular a OI que pasa por M . (b) Fijamos A en \mathcal{C} y elegimos B con distribución uniforme en \mathcal{C} . (c) Elegimos un punto M en forma uniforme en el círculo, y consideramos la cuerda AB perpendicular a OM por el punto M .

11. (a) La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$ continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. (b) Consideremos una variable aleatoria Y con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y sea $F(x)$ una función de distribución continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$, donde F^{-1} denota la función inversa de la función F , tiene función de distribución $F(x)$. (c) Escribir un programa de computadora que simule una variable exponencial de parámetro α , y obtener la frecuencia de aparición de valores mayores que 3 para $\alpha = 1$ en 1000 experimentos.
12. Supongamos que la cantidad de huevos que pone un insecto tiene distribución de Poisson con parámetro λ , y la probabilidad de que un huevo se desarrolle es p . Asumiendo independencia para el desarrollo de huevos distintos, mostrar que el número de sobrevivientes tiene distribución de Poisson con parámetro λp .