Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales–Curso 2003

Práctico 5

1. Sea $\Phi(t)$ una matriz $n \times n$ cuyos elementos son funciones de clase C^1, no singular para cada $t \in \mathbb{R}$. Probar que existe una única matriz $A(t)$ continua tal que Φ es matriz fundamental de $x' = A(t)x$.

2. Sea $\Phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ tal que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \operatorname{th} t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$. Comprobar que $\Phi(0) = Id$. ¿Existe algún sistema lineal para el cual Φ es una matriz fundamental?

3. Se considera en la semirrecta positiva el sistema: $\begin{cases} x' = \frac{5t^2+1}{t(t^2+1)}x - \frac{1+3t^2}{t^2}y + t \\ y' = \frac{6t^2+2}{(t^2+1)^2}x - \frac{5t^2+1}{t(t^2+1)}y + \frac{1}{t} \end{cases}$. Verificar que $(u(t), v(t)) = (1 + t^2, t)$ es solución del correspondiente sistema homogéneo. Resolver completamente el sistema haciendo el cambio $(x, y) = (u\bar{x}, v\bar{x} + \bar{y})$.

4. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $A, B : I \to M_n(\mathbb{R})$ funciones continuas. Se considera la ecuación (I) $x' = A(t)x$, y también la ecuación (I*) $y' = -yA(t)$, llamada *ecuación adjunta de* (I).
   (a) Demostrar que si φ y ψ son soluciones de (I) y de (I*) respectivamente, entonces el producto escalar $\psi \cdot \varphi$ es constante.
   (b) Sea $\Phi : I \to M_n$ una matriz fundamental de la ecuación (I). Probar que $\Psi : I \to M_n$ tal que $\Psi(t) = \Phi(t)^{-1}$ es una matriz fundamental de la ecuación adjunta (I*).
   (c) Sean Φ_a y Φ_b soluciones de las ecuaciones matriciales $M' = A(t)M, M(t_0) = Id$ y $M' = MB(t), M(t_0) = Id$. Probar que la solución de $M' = A(t)M + MB(t), M(t_0) = M_0$ es $\Phi = \Phi_a M_0 \Phi_b$.

5. Sean $A \in M_n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Suponemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ no es valor propio de A.
   (a) Probar que la ecuación $\dot{x} = Ax + e^{\alpha t}b$ tiene una única solución de la forma $\varphi(t) = e^{\alpha t}u$, con $u \in \mathbb{R}^n$. Calcular u en función de A, b y α.
   (b) Resolver el sistema $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^{2t} \\ \dot{y} = x + 2y - e^{2t} \end{cases}$.

6. Hallar la solución general y bosquejar en el plano de fases las soluciones de $x' = Ax$ en los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = -2x + 3y & y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 4e^{4t} + 2t & x(0) = 1 \\ \dot{y} = -2x + 3y + e^{4t} + 2t & y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x + 3z \\ \dot{y} = -8x + y + 11z \\ \dot{z} = -2x + 4z \end{cases}$$

8. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Encontrar una base de soluciones para $x' = Ax$ y probar que toda solución de esta ecuación tiende a cero cuando $t \to -\infty$.

   (b) Calcular la solución φ de $x' = Bx$, $x(0) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Probar que φ es acotada si y sólo si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Ejercicios complementarios

En clase hemos usado explícita o implícitamente los resultados de los ejercicios siguientes.

9. Sea $(X, \| \ \|)$ un $\mathbb{F}$–espacio normado de dimensión finita n, donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, y supongamos que $\mathsf{b} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de X. Sea $\psi : \mathbb{F}^n \to X$ tal que $\psi\big((\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Sobre $\mathbb{F}^n$ se considera la topología definida por la norma euclidiana: $\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\|_2 = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.

   (a) Demostrar que ψ es un isomorfismo lineal continuo, y deducir que $\psi(S)$ es compacto en $(X, \| \ \|)$, donde $S = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^n : |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 = 1\}$.

   (b) Sea $\gamma := \text{mín}\{\|\psi(x)\| : x \in S\}$. Mostrar que γ es estrictamente positivo, y que para todo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^n$ se tiene que $\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\|_2 \leq \gamma^{-1} \|\psi\big((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big)\|$. Concluir que ψ es un homeomorfismo.

   (c) Deducir que todo par de normas $\| \ \|_a$ y $\| \ \|_b$ sobre X son equivalentes, es decir, existen constantes α y β tales que $\|x\|_b \leq \alpha \|x\|_a$ y $\|x\|_a \leq \beta \|x\|_b$, $\forall x \in X$. En particular $\| \ \|_a$ y $\| \ \|_b$ definen la misma topología sobre X.

10. Sean $\| \ \|_a$, $\| \ \|_b$ y $\| \ \|_c$ normas cualesquiera sobre $M_{m \times n}$, $M_{n \times k}$ y $M_{m \times k}$ respectivamente. Demostrar que existe una constante $\kappa > 0$ tal que $\|AB\|_c \leq \kappa \|A\|_a \, \|B\|_b$, $\forall A \in M_{m \times n}$ y $\forall B \in M_{n \times k}$.

11. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $A : I \to M_{m \times n}$ y $B : I \to M_{n \times k}$ funciones derivables. Entonces:

    (a) $(AB)' = A'B + AB'$.

    (b) Mostrar que si $m = n$, y $A(t_0)$ es invertible, entonces hay un entorno V de t_0 tal que $A(t)$ es invertible para todo $t \in V$. Demostrar que el mapa $C : V \to M_n$ tal que $C(t) = A(t)^{-1}$ es derivable en V, y además: $C'(t) = -A(t)^{-1} A'(t) A(t)^{-1}$, $\forall t \in V$. Notar que esto ya se sabía en el caso $n = 1$.

    (c) Supongamos que $m = n$, y que $A = (A_1, \ldots, A_n)$, donde A_j es la columna j-ésima de A. Entonces $(\det A)' = \sum_{j=1}^n \det(A_1, \ldots, A_j', \ldots, A_n)$.

$\boxed{\text{Entregar el Ejercicio 5.}}$

Fecha máxima de entrega: 10 de noviembre.