

CÁLCULO VECTORIAL

NOTAS DEL CURSO

2018



Instituto de Matemática y Estadística

Facultad de Ingeniería

UdelaR

Índice general

1. Teoremas de cálculo infinitesimal en varias variables	5
1.1. Preliminares	5
1.2. Extremos relativos y absolutos	7
1.2.1. Reconocimiento de puntos críticos	10
1.2.2. Extremos Absolutos	14
1.3. Función inversa	15
1.4. Función implícita	17
1.5. Extremos condicionados	22
1.5.1. Multiplicadores de Lagrange	23
2. Curvas y Superficies	27
2.1. Curvas paramétricas	27
2.1.1. Reparametrizaciones	30
2.1.2. Longitud de arco	33
2.1.3. Curvas parametrizadas por longitud de arco	36
2.1.4. Triedro de Frenet	40
2.2. Integrales de línea	44
2.2.1. Integrales de línea de campos escalares	46
2.2.2. Integrales de línea de campos vectoriales	48
2.3. Campos de gradientes	51
2.3.1. Integral de línea de un campo de gradientes	52
2.4. Rotor y campos irrotacionales	55
2.4.1. Rotor	55
2.4.2. Campos irrotacionales	57
2.5. Divergencia y campos solenoidales	60
2.5.1. Divergencia	60
2.5.2. Campos solenoidales	61

2.6.	Superficies paramétricas	63
2.6.1.	Plano Tangente	66
2.6.2.	Área de superficies parametrizadas	71
2.6.3.	Orientación de superficies parametrizadas	74
2.7.	Integrales de superficie	79
2.7.1.	Integrales de campos escalares	79
2.7.2.	Integrales de campos vectoriales	82
2.8.	Teorema de Green	87
2.9.	Teorema de Stokes	95
2.9.1.	Interpretación intrínseca del rotor	99
2.9.2.	Aplicaciones del teorema de Stokes	100
2.10.	Teorema de Gauss	102
2.10.1.	Ley de Gauss del electromagnetismo	107
2.10.2.	Interpretación intrínseca de la divergencia	108
3.	Formas diferenciales	111
3.1.	Integrales de formas	114
3.1.1.	Integrales de 1-formas	114
3.1.2.	Integrales de 2-formas	114
3.1.3.	Integrales de 3-formas	116
3.2.	Producto exterior	116
3.3.	Derivada exterior	118
3.4.	Campos en \mathbb{R}^3	122
3.5.	Formas cerradas versus formas exactas	123
3.6.	Teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de formas	126

Capítulo 1

Teoremas de cálculo infinitesimal en varias variables

1.1. Preliminares

Consideremos $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

donde $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones a valores reales y se llaman funciones coordenadas de la función f .

Definición 1.1.1. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **continua en a** si $a \in D$ y dado $B_{f(a)}$ existe B_a tal que $f(B_a \cap D) \subset B_{f(a)}$.

Equivalentemente $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta) \cap D) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Esto equivale, para el caso en que $a \in D$, a decir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Decimos que f es continua en un conjunto S si f es continua en cada punto de S .

Proposición 1.1.2. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en a si $a \in D$ y para toda sucesión $(x_k) \subset D$, con $x_k \rightarrow a$, se cumple $f(x_k) \rightarrow f(a)$.

Proposición 1.1.3. $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, entonces f continua en a si f_i continua en a para $i = 1, \dots, m$.

Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en a en el interior de D si su incremento $f(a+h) - f(a)$ puede ser aproximado por una función $df_a(h)$ lineal en h .

Es decir

$$f(a+h) - f(a) = df_a(h) + r(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Para el caso $n = 2$:

$$df_a(h) = \nabla f(a) \cdot h = f_x(a)\Delta x + f_y(a)\Delta y, \quad \text{donde } h = (\Delta x, \Delta y)$$

Cuando decimos que $df_a(h)$ es una función (o transformación) lineal en h nos referimos a que df_a es una transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , es decir

1. $df_a(\lambda h) = \lambda df_a(h)$,
2. $df_a(h_1 + h_2) = df_a(h_1) + df_a(h_2)$.

Esto nos dice que la función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que en general no es lineal, se aproxima localmente (cerca de a) por una función lineal.

Extendamos este concepto para f con recorrido en \mathbb{R}^m .

Definición 1.1.4. Sea $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$, a interior a D . Entonces f es **diferenciable** en a si existe una transformación lineal $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + r(h), \quad \text{con } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Observemos h es un incremento en \mathbb{R}^n , y la función resto, $r(h)$, va de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , y por lo tanto el cero que aparece en la condición del resto, es el cero de \mathbb{R}^m .

Teorema 1.1.5. Sea $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$, a interior a D . Entonces

1. f es diferenciable en a si f_i es diferenciable en a , para todo $i = 1, \dots, m$.
2. En las condiciones de 1), la transformación df_a es única y tiene matriz asociada

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m .

Demostración. 1. Si f es diferenciable en a ,

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + r(h), \quad \text{con } df_a \text{ lineal y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

La igualdad anterior y el límite son sobre vectores de \mathbb{R}^m . Considerando la coordenada i -ésima obtenemos:

$$f_i(a + h) = f_i(a) + (df_a(h))_i + r_i(h), \quad \text{con } (df_a)_i \text{ lineal y } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_i(h)}{\|h\|} = 0 \quad (1.1)$$

que es la definición de diferenciabilidad para f_i , ya que la coordenada i -ésima de una transformación lineal es lineal también.

El recíproco es similar.

2. La ecuación 1.3 nos dice de $d(f_i)_a(h) = (df_a)_i(h)$, coordenada i -ésima de $df_a(h)$. Sabemos que $d(f_i)_a(h) = \nabla(f_i)(a) \cdot h$ y que

$$\nabla(f_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \right).$$

Por lo tanto $(J_f(a))_{ij} = d(f_i)_a(e_j) = \nabla(f_i)(a) \cdot e_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

□

Definición 1.1.6. La matriz $m \times n$ $J_f(a)$ que tiene por filas a los gradientes $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_m(a)$, se llama **matriz Jacobiana** de f en a . Para el caso particular $m = n$, la matriz $J_f(a)$ es cuadrada y le podemos calcular su determinante, $\det(J_f(a))$, que se llama **Jacobiano** de f en a y se denota

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Teorema 1.1.7 (Regla de la cadena). Sean $g : D_g(\subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : D_f(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $g(D_g) \subset D_f$. Si g es diferenciable en $a \in D_g$ y f es diferenciable en $b = g(a)$. Entonces $f \circ g : D_g(\subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en a , y además

$$d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a,$$

o equivalentemente $J_{f \circ g}(a) = J_f(g(a))J_g(a)$.

1.2. Extremos relativos y absolutos

Recordemos que una función de una variable tiene un **máximo (mínimo) relativo** en un punto si la función toma en él un valor mayor o igual (menor o igual) que en los demás puntos de un entorno y tiene un **máximo (mínimo) absoluto** en un punto si toma en él un valor mayor o igual (menor o igual) que en cualquier otro punto del dominio.

De forma análoga se definen extremos para funciones en varias variables.

Definición 1.2.1. Sea $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D$. Decimos que f tiene en a un

- **máximo (mínimo) relativo** si $\exists B_a \subset D$: para todo $v \in B_a$ $f(v) \leq f(a)$ ($f(v) \geq f(a)$).
- **máximo (mínimo) absoluto** si para todo $v \in D$ $f(v) \leq f(a)$ ($f(v) \geq f(a)$).

Proposición 1.2.2 (Condición necesaria de existencia de extremo relativo). Si $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene extremo relativo y derivadas parciales en a , entonces

$$\nabla f(a) = (0, \dots, 0)$$

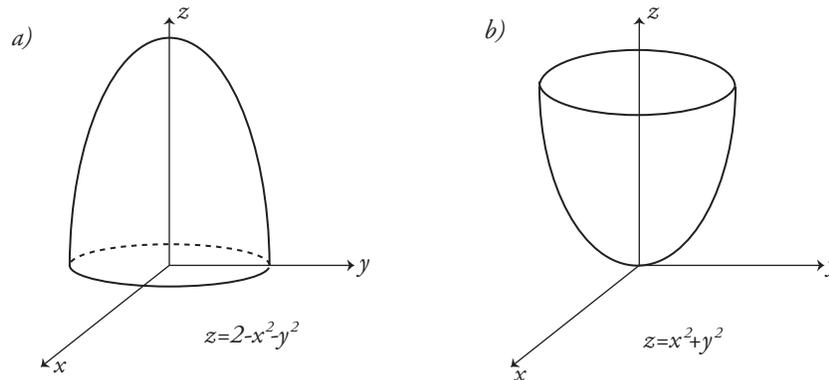


Figura 1.1: a) Máximo relativo en el origen, b) Mínimo relativo en el origen

Demostración. Sea $a = (a_1, \dots, a_n)$ y supongamos, por ejemplo, que f tiene un máximo relativo en a . Entonces existe B_a tal que $\forall v \in B_a f(v) \leq f(a)$. Por lo tanto $\forall (x, a_2, \dots, a_n) \in B_a$ tenemos que $f(x, a_2, \dots, a_n) \leq f(a_1, \dots, a_n)$, o sea que la función $g(x) = f(x, a_2, \dots, a_n)$ posee un máximo relativo en a_1 . La existencia de f_{x_1} en a asegura la existencia de g' en a_1 , ya que $g'(a_1) = f_{x_1}(a)$. Además al ser a interior, también lo es a_1 en el dominio de g . Por el teorema correspondiente al que estamos demostrando pero para funciones de una variable, tenemos que $g'(a_1) = 0$, por lo que $f_{x_1}(a) = 0$. Análogamente $f_{x_i}(a) = 0$, para $i = 2, \dots, n$. \square

Ejemplo 1.2.1 (Mínimo relativo). Consideremos $f(x, y) = x^2 + y^2$ definida en $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. En este caso la función f tiene un mínimo relativo, que además es absoluto, en $(0, 0)$. En dicho punto $\nabla f = (2x, 2y)$ se anula. El máximo absoluto de f ocurre en la frontera ∂D de D , o sea en $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, por lo que no es un máximo relativo. Además allí ∇f no se anula. Ver figura 1.1 b).

Ejemplo 1.2.2 (Máximo relativo). Consideremos la función $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. La superficie que define esta función es un paraboloides de revolución que en las proximidades del origen tiene la forma indicada en la figura 1.1 a). Consideremos el dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. En este caso la función tiene un máximo relativo, que además es absoluto, en $(0, 0)$. En dicho punto $\nabla f = (-2x, -2y)$ se anula. El mínimo absoluto de f ocurre en la frontera ∂D de D , o sea en $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\}$, por lo que no es un mínimo relativo. Además allí ∇f no se anula.

Definición 1.2.3. a es **punto crítico** de f sii f es diferenciable en a y $\nabla f(a) = 0$.

Observación 1.2.4. Observar que $\nabla f(a)$ puede existir, pero f no ser diferenciable en a . Por ejemplo, $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$, entonces el punto $(0, 0)$ no es un punto crítico de f .

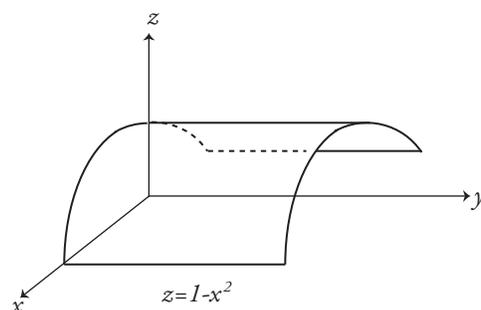


Figura 1.2: Máximo relativo en el origen

Por la Proposición 1.2.2, los extremos relativos se dan en puntos críticos cuando existe ∇f . Sin embargo, no todos los puntos críticos son extremos relativos.

Ejemplo 1.2.3 (Paraboloide hiperbólico o silla de montar).

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

El único punto crítico de f es $(0, 0)$, ya que $\nabla f = (2x, 2y)$, pero no es un extremo. De hecho, $\forall n \in \mathbb{N} f(0, 1/n) = -1/n^2 < 0 < 1/n^2 = f(1/n, 0)$ por lo que en toda bola de centro $(0, 0)$ la función toma valores por encima y por debajo de $f(0, 0) = 0$.

Ejemplo 1.2.4 (Mínimo relativo). Consideremos $f(x, y) = x^2 y^2$. Esta superficie se parece a un valle circundado por cuatro montañas. Existe un mínimo relativo que también es absoluto en el origen, ya que $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$ para todo (x, y) . En este caso $\nabla f = (2xy^2, 2x^2y)$ y en particular se anula en $(0, 0)$, por lo tanto el origen es un mínimo relativo.

Ejemplo 1.2.5 (Máximo relativo). Sea $f(x, y) = 1 - x^2$. En este caso la superficie está dada en la figura 1.2. Es evidente que existe un máximo relativo que también es absoluto en el origen debido a que $f(x, y) = 1 - x^2 \leq f(0, 0) = 1$ para todo (x, y) . Además $\nabla f = (-2x, 0)$ que se anula en el origen.

Observación 1.2.5. Como sabemos, ya en funciones de una variable la anulación de f' no garantiza la existencia de un extremo. Para estudiar la existencia de extremos, en ese caso, o se recurre a un estudio de crecimiento (signo de f') o se estudia la derivada segunda. El primer método no es trasladable a \mathbb{R}^n . El desarrollo de Taylor nos permitirá extender el segundo método.

1.2.1. Reconocimiento de puntos críticos

Supongamos que a es un punto crítico de f y que f tiene desarrollo de Taylor de orden 2. Tenemos $df_a(v) = 0$, entonces

$$f(a+v) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f_a(v) + r(v), \quad \text{con } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|^2} = 0$$

Si consideramos, intuitivamente, que el resto $r(v)$ es despreciable, entonces el signo de $d^2f_a(v)$ determina el signo de $\Delta f = f(a+v) - f(a)$.

Si $d^2f_a(v)$ es positivo $\forall v \neq 0$, $\Delta f \geq 0$ y f tendrá un mínimo en a . Naturalmente, esta versión intuitiva debe ser hecha con rigor, pero nos da una idea de que es relevante saber estudiar el signo de d^2f , que es un polinomio homogéneo de grado dos, en los incrementos $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ de las variables. ($\Delta x, \Delta y$ para el caso $n = 2$).

Un polinomio de grado dos en n variables, homogéneo, es llamado forma cuadrática en \mathbb{R}^n , como se estudió en el curso de Álgebra Lineal. Recordemos algunas definiciones y estudiemos el signo de una forma cuadrática en el caso $n = 2$.

Hay cinco posibilidades para d^2f :

1. $d^2f(v) > 0$ para todo $v \neq 0$, en este caso se dice que la forma es **definida positiva**.
2. $d^2f(v) \geq 0$ para todo v , y existe $v \neq 0$ tal que $d^2f(v) = 0$, en este caso se dice que la forma es **semidefinida positiva**.
3. $d^2f(v) < 0$ para todo $v \neq 0$, en este caso se dice que la forma es **definida negativa**.
4. $d^2f(v) \leq 0$ para todo v , y existe $v \neq 0$ tal que $d^2f(v) = 0$, en este caso se dice que la forma es **semidefinida negativa**.
5. Existen v_1 y v_2 tales que $d^2f(v_1) > 0$ y $d^2f(v_2) < 0$, en este caso se dice que la forma es **indefinida**.

Teorema 1.2.6. *Si f tiene un punto crítico en a , y admite desarrollo de Taylor de orden 2 en a , entonces:*

1. *Si d^2f_a es definida positiva, f tiene un mínimo relativo en a .*
2. *Si d^2f_a es definida negativa, f tiene un máximo relativo en a .*
3. *Si d^2f_a es indefinida, f no tiene máximo ni mínimo en a (se dice en este caso que f tiene un punto de silla en a).*

(en el caso d^2f_a semidefinida, el criterio no permite decidir)

Demostración. Por Taylor (y como $df_a = 0$),

$$f(a+v) - f(a) = \frac{1}{2}d^2f_a(v) + r(v), \quad \text{con } \lim_{v \rightarrow 0} R(v) = 0, \quad \text{donde } R(v) = \frac{r(v)}{\|v\|^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(a+v) - f(a) &= \|v\|^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 f_a(v)}{\|v\|^2} + R(v) \right) \\ &= \|v\|^2 \left(\frac{1}{2} d^2 f_a(u) + R(v) \right) \quad (*) \end{aligned}$$

donde $u = v/\|v\|$, vector de módulo 1 (versor) colineal con v , pertenece a $S = \partial B(0;1)$, compacto de \mathbb{R}^n .

En (*) estamos asumiendo que $\frac{d^2 f_a(v)}{\|v\|^2} = d^2 f_a \left(\frac{v}{\|v\|} \right)$. Queda como ejercicio probar esta igualdad.

1. Como $d^2 f_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio, será una función continua, por lo tanto tiene máximo y mínimo en S .

Definamos $\phi = d^2 f_a$. Si ϕ es definida positiva, su mínimo m debe ser positivo (pues $m = \phi(u_1)$, para cierto $u_1 \in S$), entonces $\phi(u) \geq m > 0 \forall u \in S$: Si volvemos a la expresión (*), como $\lim_{v \rightarrow 0} R(v) = 0$, podemos elegir B_0 , una bola centrada en el origen suficientemente pequeña tal que si $v \in B_0$, entonces $|R(v)| < m/2$. De lo que se deduce que si $v \in B_0$, $\frac{1}{2}\phi(u) + R(v) > \frac{1}{2}m - \frac{m}{2} = 0$, por lo tanto $f(a+v) - f(a) > \|v\|^2 \cdot 0 = 0$. Por lo tanto, si B_0 tiene radio δ , entonces para todo $b \in B_a(\delta)$, $f(b) \geq f(a)$, de donde f tiene un mínimo relativo en a .

2. Si $d^2 f_a$ es definida negativa, entonces $d^2(-f)_a = -d^2 f_a$ es definida positiva, de donde $-f$ tiene un mínimo relativo en a y f un máximo relativo allí.

3. Si $d^2 f_a$ es indefinida, entonces existen v_1, v_2 tal que $d^2 f_a(v_1) > 0 > d^2 f_a(v_2)$. Sea $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_v(t) = f(a + tv)$, entonces $g'_v(t) = df_{a+tv}(v)$ y $g''_v(t) = d^2 f_{a+tv}(v)$. Por lo tanto $g_v(0) = f(a)$, $g'_v(0) = df_a(v) = 0$, $g''_{v_1}(0) > 0$ y $g''_{v_2}(0) < 0$. Por resultados de funciones de una variable, existe un $\delta > 0$, tal que si $t \in B(0; \delta) - \{0\}$, $g_{v_1}(t) > g_{v_1}(0)$, o sea $f(a + tv_1) > f(a)$ y $g_{v_2}(t) < g_{v_2}(0)$, o sea $f(a + tv_2) < f(a)$. De donde f no presenta ni máximo ni mínimo en a .

□

Consideremos $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales segundas $D_{ij}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ continuas en una bola $B(a)$ de centro a . Nuevamente, la fórmula de Taylor de orden 2 de f nos dice que:

$$d^2 f_a(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} f(a) v_i v_j = \frac{1}{2} v H(a) v^t$$

donde $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, v^t es el vector columna y

$$H(a) = (D_{ij} f(a))_{ij}$$

es la **matriz Hessiana** de f en a .

Observar que, como f tiene derivadas parciales segundas continuas, H es una matriz

simétrica. Cuando $n = 2$ la matriz H en a es:

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}.$$

Recordemos un teorema de álgebra lineal

Teorema 1.2.7. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ simétrica, y consideremos la forma cuadrática*

$$Q(v) = vAv^t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}v_iv_j$$

entonces:

1. Q definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son positivos.
2. Q semidefinida positiva si y sólo si un valor propio de A es nulo y todos los demás son positivos.
3. Q definida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son negativos.
4. Q semidefinida negativa si y sólo si un valor propio de A es nulo y todos los demás son negativos.
5. Q indefinida si y sólo A tiene valores propios positivos y negativos.

Como corolario de los dos teoremas previos tenemos el siguiente criterio de clasificación de puntos críticos usando la matriz Hessiana.

Teorema 1.2.8. *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales segundas continuas en una bola $B(a)$, y $H(a)$ la matriz Hessiana en un punto crítico a . Entonces:*

1. Si todos los valores propios de $H(a)$ son positivos, f tiene un mínimo relativo en a .
2. Si todos los valores propios de $H(a)$ son negativos, f tiene un máximo relativo en a .
3. Si $H(a)$ tiene valores propios positivos y negativos, f tiene un punto silla en a .

Veremos a continuación un método general para clasificar formas cuadráticas de \mathbb{R}^2 .

Proposición 1.2.9. *Sea Q una forma cuadrática en \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada es*

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

1. Si $\det H > 0$ y
 - a) $\alpha > 0$, entonces Q es definida positiva,

- b) $\alpha < 0$, entonces Q es definida negativa.
2. Si $\det H < 0$, entonces Q es indefinida.
3. Si $\det H = 0$, entonces Q es semidefinida.

Demostración. H simétrica, entonces es diagonalizable, por lo tanto existen λ_1 y λ_2 vap's de H . Consideremos el polinomio característico de H , $p(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma - \beta^2)$.

1. Si $\det H > 0$ entonces λ_1 y λ_2 son no nulos y de igual signo. Además $\alpha\gamma > \beta^2 \geq 0$.
 - a) Si $\alpha > 0$ entonces $\gamma > 0$. Por lo tanto $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Lo cual termina de probar que son positivos y por lo tanto Q definida positiva.
 - b) Si $\alpha < 0$ entonces $\gamma < 0$. Por lo tanto $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Lo cual termina de probar que son negativos y por lo tanto Q definida negativa.
2. Si $\det H < 0$ entonces λ_1 y λ_2 son no nulos y de signos opuestos. Entonces Q es indefinida.
3. Si $\det H = 0$, entonces al menos un valor propio es nulo, entonces $\lambda_1 = 0$ y nos queda un único vap que puede ser positivo o negativo. Entonces Q es semidefinida.

□

Ejemplos 1.2.1. 1. Estudiar los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$.

Primero veamos como queda el gradiente de f : $f_x = 3x^2 - 9y$, $f_y = 3y^2 - 9x$. Resolviendo $\nabla f = 0$ se obtienen los puntos críticos $(0, 0)$, $(3, 3)$. Para clasificarlos hallemos la matriz H en cada caso.

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{xy}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}.$$

En el punto $(0, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H < 0 \Rightarrow d^2 f_{(0,0)}$ indefinida $\Rightarrow (0, 0)$ es punto silla.

En el punto $(3, 3)$, $H = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H > 0$, como $\alpha = 18 > 0$ entonces $d^2 f_{(3,3)}$ es definida positiva y por lo tanto $(3, 3)$ es un mínimo relativo.

2. Estudiar los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Veamos como queda el gradiente de f , $f_x = 3x^2 - 3y^2$, $f_y = -6xy$. Entonces $(0, 0)$ es el único punto crítico. En $(0, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $d^2 f$ es semidefinida (es nula).

En este caso el criterio no identifica el tipo de punto. Sin embargo, un argumento directo nos muestra que no es un extremo: $f(x, 0) = x^3$, por lo tanto f toma valores positivos negativos en todo entorno de $(0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

3. Consideremos $f(x, y) = x^2 + y^2(x + 1)^3$, su gradiente es $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (2x + y^2 3(x + 1)^2, 2y(x + 1)^3)$, que si es nulo entonces $2y(x + 1)^3 = 0 \Rightarrow y = 0$ o $x = -1$. Si $y = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Si $x = -1 \Rightarrow f_x(-1, y) = -2 \neq 0$, por lo tanto el único punto crítico es $(0, 0)$.

Clasifiquémoslo:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + y^2 6(x + 1) & 6y(x + 1)^2 \\ 6y(x + 1)^2 & 2(x + 1)^3 \end{pmatrix} \Rightarrow H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $(0, 0)$ es un mínimo relativo, sin embargo no es absoluto ya que $f(-2, \sqrt{5}) < f(0, 0)$.

1.2.2. Extremos Absolutos

Ya se dio la definición anteriormente (Definición 1.2.1). Un caso particular en que se puede asegurar la existencia de extremos (máximo y mínimo) absolutos es cuando el dominio D es compacto y la función es continua (teorema de Weierstrass). Supondremos, en lo que sigue, f diferenciable. Como ya se dijo, un extremo absoluto que se da en un punto interior es también relativo, y por lo tanto un punto crítico. Si se quiere entonces encontrar los extremos absolutos de una función diferenciable en un dominio D compacto, basta entonces estudiar:

1. Los puntos críticos (que estarán en el interior de D).
2. La frontera de D .

Ejemplo 1.2.6. Consideremos la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y,$$

donde $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

El dominio es el triángulo de vértices $O = (0, 0)$, $A = (3, 0)$ y $B = (0, 3)$.

Puntos críticos: $f_x = 2x - y - 1 = 0$ y $f_y = 2y - x - 1$ entonces punto crítico interior a D : $(1, 1)$, además $f(1, 1) = -1$.

Frontera: Hay que estudiar que pasa en cada lado del triángulo.

- Lado OA , $0 \leq x \leq 3$, $y = 0$, $f(x, 0) = x^2 - x$, $f(x, 0)' = 2x - 1$, $f(0, 0) = 0$, $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ y $f(3, 0) = 6$. Entonces
 - El máximo de f en OA se da en A y vale 6.
 - El mínimo de f en OA se da en $(\frac{1}{2})$ y vale $-\frac{1}{4}$.
- Lado OB , es igual al caso anterior sustituyendo x por y . Entonces
 - El máximo de f en OB se da en B y vale 6.
 - El mínimo de f en OB se da en $(0, \frac{1}{2})$ y vale $-\frac{1}{4}$.

- Lado AB , $0 \leq x \leq 3$, $y = 3 - x$, $f(x, 3 - x) = 3(x^2 - 3x + 2)$. Su derivada es $6x - 9$, se anula en $x = \frac{3}{2}$, $f(0, 3) = 6$, $f(3, 0) = 6$ y $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$.
 - El máximo de f en AB se da en A y B y vale 6.
 - El mínimo de f en AB se da en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ y vale $-\frac{3}{4}$.

Se sabe que f tiene máximo y mínimo absoluto en D . Luego debe ser alguno de los puntos encontrados. Comparando, se obtiene que

- **Máximo absoluto** de f en D : 6 en los puntos A y B .
- **Mínimo absoluto** de f en D : -1 en el punto $(1, 1)$.

1.3. Función inversa

Recordemos que dado un conjunto A , la función $id_A : A \rightarrow A$ es la identidad en A definida por $id_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Definición 1.3.1. Se dice que una función $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **localmente invertible** en a interior a D , si existen entornos U y V de a y $f(a)$ respectivamente, tales que $f|_U : U \rightarrow V$ es biyectiva, o sea que existe $f^{-1} : V \rightarrow U$, con $f \circ f^{-1} = id_V$ y $f^{-1} \circ f = id_U$. Nótese que $V = f(U)$.

Por ejemplo, $f(x, y) = (\sin x, \sin y)$ es localmente invertible en $(0, 0)$, pero $g(x, y) = (x^2, y)$ no lo es, ya que $g(-\varepsilon, y) = g(\varepsilon, y)$ por más chico que sea ε , por lo tanto g no puede ser inyectiva en ningún entorno de $(0, 0)$.

Si tenemos una función $f(x)$ de una variable, de clase C^1 con $f'(x_0) \neq 0$, sabemos que existe una función inversa $x = f^{-1}(y)$ definida en un entorno de $y_0 = f(x_0)$. Además, f^{-1} es derivable en y_0 y $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

La condición $f'(x_0) \neq 0$ anterior equivale a pedir que $f'(x_0)$ tenga inverso o que df_{x_0} sea una transformación lineal invertible.

Si pensamos ahora en funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ parece natural exigir que $J_f(a)$ sea una matriz $n \times n$ invertible, lo que equivale a decir que df_a es invertible.

En este sentido tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3.2 (de la función inversa). *Sea $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k , a interior a D , $J_f(a)$ invertible. Entonces f es localmente invertible y su inversa f^{-1} es de clase C^k . Además*

$$J_{f^{-1}}(f(a)) = (J_f(a))^{-1}.$$

Ejemplo 1.3.1 (Una inversa global). Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x, x^2 + y).$$

En este caso podemos hallar la función inversa, ya que

$$\begin{cases} u = x \\ v = x^2 + y \end{cases}$$

Entonces es fácil despejar x e y para obtener:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v - u^2 \end{cases}$$

Lo cual define a la función inversa f^{-1} . En este contexto podemos decir que f posee una inversa global en todo el plano. Observemos que el Jacobiano de f es

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Lo cual es coherente con la existencia de una inversa diferenciable en todo punto. También podemos verificar la relación de las matrices Jacobianas.

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$J_{f^{-1}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato verificar que $J_f(x, y)J_{f^{-1}}(x, y) = I$.

Ejemplo 1.3.2. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. La matriz Jacobiana de f es

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

La misma es invertible $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ya que $\det J_f(x, y) = e^{2x} \neq 0$. Por lo tanto existe una inversa local en un entorno de cualquier punto. Sin embargo, es evidente que no puede existir una inversa global, porque el punto (x_0, y_0) y el punto $(x_0, y_0 + 2\pi)$ tienen la misma imagen por f .

En $(0, 0)$ por ejemplo

$$f(0, 0) = (1, 0), \quad J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces existe f^{-1} en un entorno de $(1, 0)$ de clase C^∞ , ya que f lo es, y $J_{f^{-1}}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

El problema que aparece en este ejemplo es realmente difícil. El teorema de la función inversa garantiza que si $\det J_f(\bar{x}_0) \neq 0$, entonces existe una inversa local de clase C^k , definida en cierta región que contiene a \bar{x}_0 . Pero no dice gran cosa sobre el tamaño de esa región. Si no hay puntos donde el determinante se anule, como en este ejemplo, entonces el teorema no permite deducir nada sobre el tamaño de la región. Una posibilidad, en casos como el de este ejemplo, es tratar de hecho de despejar x , y como funciones de u , v .

Ejercicio: Intentar ese trabajo en este ejemplo.

Observación 1.3.3. 1. El recíproco no es cierto. Basta considerar la función $f(x, y) = (x^3, y^3)$ que es invertible, y por lo tanto, localmente invertible, en todo \mathbb{R}^2 , pero cuyo Jacobiano en $(0, 0)$ es nulo.

2. En el caso de una variable, si $f'(x) \neq 0$ en un intervalo, por ejemplo, puede definirse una inversa global en el recorrido. Uno puede intentar extender esto al caso de \mathbb{R}^n . Sin embargo, aquí el resultado no es cierto: la función del ejemplo anterior, considerada en todo \mathbb{R}^2 , no admite inversa global porque no es inyectiva: $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

1.4. Función implícita

En muchos problemas se tiene dada una ecuación $f(x, y) = 0$ verificada por dos variables, y se quiere “despejar” $y = \varphi(x)$ (o $x = \psi(y)$). Esto quiere decir encontrar una función $\varphi(x)$ tal que los puntos (x, y) cumplan $f(x, y) = 0$ si $y = \varphi(x)$.

De un modo más geométrico, representar la curva $f(x, y) = 0$ como el gráfico de una función. Esto no siempre es posible: la ecuación $9x^2 + 4y^2 - 1 = 0$, por ejemplo, no es el gráfico de ninguna función $y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$. Sin embargo, si nos interesa una solución local, es posible, en un entorno de un punto que verifica la ecuación, identificar a la curva con el gráfico de alguna de las siguientes cuatro funciones, $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 9x^2}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - 9x^2}$, $x = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 4y^2}$ o $x = -\frac{1}{3}\sqrt{1 - 4y^2}$.

Nos preguntamos si lo anterior es general: es decir, si toda ecuación $f(x, y) = 0$, con f suficientemente regular, podrá describirse localmente por una función $y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$.

El siguiente ejemplo muestra que no: con $f(x, y) = x^2 - y^2$, $f(x, y) = 0$ representa el par de rectas $y = x$, $y = -x$. En un entorno de O , no es el gráfico de una función. Hace falta, entonces, dar alguna hipótesis para asegurarlo. Si miramos el problema en forma geométrica, $f(x, y) = 0$ equivale a cortar el plano $z = 0$ con $z = f(x, y)$.

En un punto a de la intersección, supongamos que existe el plano tangente. Si este plano no es horizontal, cortará al plano $z = 0$ en una recta, donde siempre puede despejarse y en función de x o viceversa. Es natural que para la curva $f(x, y) = 0$ ocurra lo mismo.

Veremos a continuación un teorema que asegura que si f es suficientemente regular, y el plano tangente no es horizontal en cierto punto a , se puede escribir en la forma deseada.

Teorema 1.4.1 (Teorema de la función implícita). *Sea $f : D(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en D tal que $f(x_0, y_0) = 0$ con $(x_0, y_0) \in D$ y $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces: existe un rectángulo*

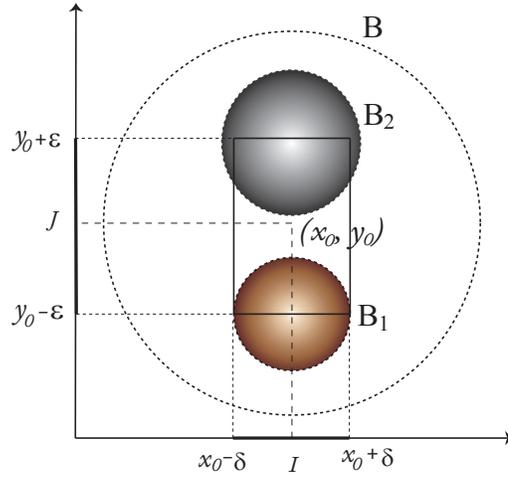


Figura 1.3:

abierto $I \times J \subset D$ de centro (x_0, y_0) y una función $\varphi : I \rightarrow J$ de clase C^1 tal que:

$$\forall (x, y) \in I \times J \text{ se cumple: } f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

O sea que $f^{-1}(0) \cap I \times J$ es el gráfico de una función $\varphi : I \rightarrow J$.

En otras palabras, la ecuación $f(x, y) = 0$ determina localmente a y en función de x , alrededor de (x_0, y_0) . Además se tiene

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}. \quad (1.2)$$

Demostración. Supongamos, para fijar ideas, que $f_y(x_0, y_0) > 0$. Como f_y es continua, existe una bola $B \subset D$ de centro (x_0, y_0) y radio r , tal que $f_y(x, y) > 0 \forall (x, y) \in B$. Entonces, para cualquier $0 < \varepsilon < r$, si $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, el segmento $\{x_0\} \times \bar{J}$ estará incluido en B . Además la función $F(y) = f(x_0, y)$ será estrictamente creciente en \bar{J} , por lo tanto, como $F(y_0) = 0$, tendremos $f(x_0, y_0 - \varepsilon) = F(y_0 - \varepsilon) < 0$ y $f(x_0, y_0 + \varepsilon) = F(y_0 + \varepsilon) > 0$. La continuidad de f nos permite tomar bolas B_1 y B_2 de centros $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ y $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ incluidas en B , donde la función será negativa y positiva respectivamente, ver Fig. 1.3. Además, si definimos δ como el menor entre los radios de B_1 y B_2 , se cumplirá

$$f(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{y} \quad f(x, y_0 + \varepsilon) > 0, \quad \forall x \in I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (1.3)$$

Resulta entonces que, para cada $x \in I$, la función $F(y) = f(x, y)$ es estrictamente creciente en \bar{J} , y continua en él. De (1.3) sabemos que $F(y_0 - \varepsilon) < 0$ y $F(y_0 + \varepsilon) > 0$, de donde se deduce, por Bolzano, que para cada $x \in I$, la función $F(y)$, tiene una única raíz, que llamaremos $\varphi(x)$, en \bar{J} . Es decir, para cada $x \in I$, $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ o sea para

cada $x \in I$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. Como $F(y_0 - \varepsilon) < 0$ y $F(y_0 + \varepsilon) > 0$, es claro que $\varphi(x) \in J \subset \bar{J}$.

Hemos demostrado que existe una función $\varphi : I \rightarrow J$ tal que $\forall (x, y) \in I \times J$ se tiene:

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x). \quad (1.4)$$

Probemos a continuación que φ es continua y derivable en I .

La continuidad es directa, ya que el ε elegido era cualquiera menor que r , así que, repitiendo el razonamiento para $(x, \varphi(x))$ en lugar de (x_0, y_0) , para cualquier $\varepsilon > 0$, obtenemos un $\delta > 0$ tal que la función está en J , es decir, a menos de ε de $\varphi(x)$.

Para ver que φ es derivable, consideremos $a = (x, \varphi(x))$, y $\Delta\varphi = \varphi(x+h) - \varphi(x)$. Está claro, por la continuidad de φ , que $\Delta\varphi \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Ahora, por la definición de φ y la diferenciabilidad de f en a tenemos:

$$0 = f(x+h, \varphi(x+h)) - f(a) = f_x(a)h + f_y(a)\Delta\varphi + R(h; \Delta\varphi) \|(h, \Delta\varphi)\| \quad \text{con} \quad \lim_{b \rightarrow 0} R(b) = 0.$$

Como $0 \leq \|(1, \Delta\varphi/h)\| \leq \|(1, 0)\| + \|(0, \Delta\varphi/h)\| = 1 + |\Delta\varphi/h|$, entonces existe $\theta \in [0, 1]$ tal que $\|(1, \Delta\varphi/h)\| = \theta(1 + |\Delta\varphi/h|)$ y tendremos que

$$\frac{\|(h, \Delta\varphi)\|}{h} = \sigma_1 \|(1, \Delta\varphi/h)\| = \sigma_1 \theta (1 + |\Delta\varphi/h|) = \sigma_1 \theta (1 + \sigma_2 \Delta\varphi/h) \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, +1\}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$$0 = f_x(a) + f_y(a) \frac{\Delta\varphi}{h} + R(h, \Delta\varphi) \sigma_1 \theta (1 + \sigma_2 \Delta\varphi/h)$$

Observar que θ , σ_1 y σ_2 son acotadas, aunque pueden variar en función de h . Despejando $\Delta\varphi/h$ obtenemos

$$\frac{\Delta\varphi}{h} = \frac{-f_x(a) - R(h, \Delta\varphi) \sigma_1 \theta}{f_y(a) + R(h, \Delta\varphi) \sigma_1 \theta \sigma_2}$$

y tomando límites cuando $h \rightarrow 0$ se ve que existe $\varphi'(x)$ y vale $-f_x(a)/f_y(a)$.

Finalmente como vale la ecuación (1.2), entonces $\varphi'(x)$ es continua y $\varphi \in C^1$ □

Observación 1.4.2. 1. Si $f_y(x_0, y_0) = 0$ entonces no se puede afirmar nada.

Por ejemplo, podemos considerar $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ y el punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Si $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ entonces la ecuación $f(x, y) = 0$ determina localmente a x como función de y . Podemos resumir los dos casos de la siguiente manera si $\nabla f(a) \neq 0$ entonces existe B_a entorno de $a = (x_0, y_0)$ y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que: $\alpha(0) = a$, $\alpha'(t) \neq 0$ y $\forall (x, y) \in B_a$ $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \exists t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : (x, y) = \alpha(t)$.

Si (x_0, y_0) es punto crítico puede suceder que la ecuación no determine función alguna alrededor de (x_0, y_0) .

2. Si la función f dada es de clase C^k entonces se concluye fácilmente que φ también es C^k . En ese caso, para hallar las derivadas sucesivas de φ se pueden aplicar las reglas de derivación, y la regla de la cadena en la fórmula (1.2).
3. El teorema anterior puede generalizarse para funciones de más de dos variables.

Si $f(x_1, \dots, x_n, y)$ es una función de $n+1$ variables de clase C^1 , $f(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_0) = 0$ y $f_y(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_0) \neq 0$; entonces existe $I \times J$, (I entorno de (x_{10}, \dots, x_{n0}) en \mathbb{R}^n , J entorno de y_0) y $\varphi: I \rightarrow J$ de clase C^1 tales que

$$\forall (x_1, \dots, x_n, y) \in I \times J, f(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Además, como $f(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$ en I , obtenemos por diferenciación que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{-f_{x_i}(a)}{f_y(a)},$$

donde $a = (x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))$.

A continuación veremos la versión general del teorema de la función implícita.

Teorema 1.4.3. (Teorema de la función implícita) Sea $f: D(\subset \mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^k , $a = (X_0, Y_0)$ interior a D , $f(a) = 0$ y

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces, existen $W_1 \subset \mathbb{R}^n$, $W_2 \subset \mathbb{R}^m$, abiertos que contienen a X_0 y Y_0 respectivamente, y $\varphi: W_1 \rightarrow W_2$ de clase C^k tal que $\forall (X, Y) \in W_1 \times W_2$

$$f(X, Y) = 0 \Leftrightarrow Y = \varphi(X).$$

Ejemplos 1.4.1. 1. Consideremos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ cerca del punto $a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Tomemos la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ de clase C^2 que en a vale 0. Como $f_y(x, y) = 2y$, entonces $f_y(a) = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 0$, por lo tanto podemos aplicar el Teorema 1.4.1 y deducir la existencia una función $\varphi: I \rightarrow J$ para un entorno I de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tal que $x^2 + \varphi^2(x) = 1$. La derivada de φ en $\frac{1}{\sqrt{2}}$, será

$$\varphi' \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{f_x \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{f_y \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = -\frac{2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)} = -1$$

ya que $f_x(x, y) = 2x$.

Se puede también proceder “derivando” la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y obtener $2x + 2yy' = 0$ de donde $y' = -\frac{x}{y}$. Si $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos que $y' = -1$. De forma similar podemos obtener y'' derivando $x + yy' = 0$ tenemos $1 + y'y' + yy'' = 0$ de donde si $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y' = -1$ tenemos $1 + 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)y'' = 0 \Rightarrow y'' = -2\sqrt{2}$.

2. Dada la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ determinar la pendiente de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) , con $y_0 \neq 0$. La pendiente es $\varphi'(x)$, donde $\varphi(x)$ es la función que se obtiene despejando y en función de x , $f_x = \frac{2x}{a^2}$, $f_y = \frac{2y}{b^2}$. Por el Teorema 1.4.1

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{2x/a^2}{2y/b^2} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x_0}{y_0}.$$

3. Consideremos la ecuación $x^3y^2 - 3xy + 2 = 0$. Comprobemos que en un entorno del punto $(1, 2)$ se puede definir implícitamente la variable y como función de la variable x . Para ello, consideremos la función $f(x, y) = x^3y^2 - 3xy + 2$. Esta función tiene derivadas parciales continuas en \mathbb{R}^2 y es claro que $f(1, 2) = 0$. Además $f_y(x, y) = 2x^3y - 3x$, en particular, $f_y(1, 2) = 1 \neq 0$. Por el Teorema 1.4.1 existen un intervalo I centrado en el punto 1 y una única función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con derivada continua en I tal que $\varphi(1) = 2$ e $y = \varphi(x)$ es solución de la ecuación $f(x, y) = 0$, o sea, $x^3\varphi^2(x) - 3x\varphi(x) + 2 = 0$ para cada $x \in I$. Si derivamos en esta expresión con respecto a la variable x obtenemos que

$$3x^2\varphi^2(x) + 2x^3\varphi(x)\varphi'(x) - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) = 0, \quad x \in I$$

En particular, para $x = 1$, tenemos $3\varphi^2(1) + 2\varphi(1)\varphi'(1) - 3\varphi(1) - 3\varphi'(1)$. Como $\varphi(1) = 2$ se obtiene que $\varphi'(1) = -6$.

4. Consideremos ahora la ecuación $x^3z - z^3yx = 0$. Veamos que la variable z se puede expresar como una función de las variables x e y alrededor del punto $(1, 1, 1)$. Para ello, consideremos la $f(x, y, z) = x^3z - z^3yx$ que tiene derivadas parciales continuas en \mathbb{R}^3 y $f(1, 1, 1) = 0$. Además, $f_z(x, y, z) = x^3 - 3z^2yx$. En particular, $f_z(1, 1, 1) = -2 \neq 0$. Por el teorema de la función implícita en más variables existen $I \times J$ centrado en el punto $(1, 1)$ y una única función $\varphi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en $I \times J$ que verifica que $\varphi(1, 1) = 1$ y es solución de la ecuación $f(x, y, z) = 0$. Ahora calculamos las derivadas de φ respecto a x e y .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1) = \frac{-f_x(1, 1, 1)}{f_z(1, 1, 1)} = \frac{-2}{-2} = 1,$$

ya que $f_x(x, y, z) = 3x^2z - z^3y$, en particular $f_x(1, 1, 1) = 2$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1) = \frac{-f_y(1, 1, 1)}{f_z(1, 1, 1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2},$$

ya que $f_y(x, y, z) = -z^3x$, en particular $f_y(1, 1, 1) = -1$.

5. Consideremos las siguientes ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - y = 0$, probemos que alrededor del punto $(0, 0, 1)$ la intersección es una curva que tiene una parametrización de la forma $C(x) = (x, y(x), z(x))$ y calculemos la ecuación de la

recta tangente a dicha curva en este punto.

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - y).$$

Tienen derivadas parciales continuas en todo \mathbb{R}^3 , verifica que $f(0, 0, 1) = (0, 0)$ y

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0, 1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(0, 0, 1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0, 1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(0, 0, 1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita existen un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ centrado en el punto 0 , un entorno $B \subset \mathbb{R}^2$ centrado en $(0, 1)$ y una única función $\varphi : I \rightarrow B$ derivable tal que $\varphi(0) = (0, 1)$ y $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (y, z) = \varphi(x)$. Es decir $y = \varphi_1(x)$ y $z = \varphi_2(x)$.

Si derivamos en las dos ecuaciones que verifican las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ con respecto a la variable independiente x obtenemos que

$$2x + 2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) + 2\varphi_2(x)\varphi_2'(x) = 0, \quad 2x + 2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) - \varphi_1'(x) = 0.$$

En particular, para $x = 0$ y teniendo en cuenta que $\varphi_1(0) = 0$ y $\varphi_2(0) = 1$, tenemos que $\varphi_2'(0) = 0$ e $\varphi_1'(0) = 0$. Es decir, un vector tangente a la curva es $(1, 0, 0)$. De esta forma la ecuación paramétrica de la recta tangente es

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 0).$$

1.5. Extremos condicionados

Veamos a continuación dos ejemplos de problemas de extremos condicionados.

Ejemplo 1.5.1. Dada una superficie S que no pase por el origen, determinar los puntos de S más próximos al origen.

Ejemplo 1.5.2. Si $f(x, y, z)$ representa la temperatura en (x, y, z) , determinar los valores máximo y mínimo de la temperatura en una curva dada \mathcal{C} en del espacio.

Ambos ejemplos son casos particulares del siguiente problema general: Determinar los valores extremos de una función $f : D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ cuando restringimos f a un subconjunto dado de su dominio.

En el Ejemplo 1.5.1 la función cuyo mínimo se desea es la función distancia,

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

y el subconjunto restringido es la superficie dada S . En el Ejemplo 1.5.2 tal subconjunto es la curva dada \mathcal{C} .

Con frecuencia los problemas de extremos condicionados son muy difíciles, no se conoce un método general para resolverlos con toda generalidad. Se utilizan métodos particulares cuando el subconjunto restringido tiene una estructura sencilla, por ejemplo, si es una curva como en el Ejemplo 1, o una superficie como en el Ejemplo 2. Un método para resolver estos problemas es el de los multiplicadores de Lagrange, que estudiaremos a continuación.

1.5.1. Multiplicadores de Lagrange

Si una función $f(x_1, \dots, x_n)$ tiene un extremo relativo cuando está sometida a m condiciones, por ejemplo

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1.5)$$

siendo $m < n$, existen entonces m escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_m \nabla g_m \quad (1.6)$$

en cada punto extremo.

Para determinar los puntos extremos en la práctica consideramos el sistema de $n + m$ ecuaciones formado con las m ecuaciones de condición (1.5) y las n ecuaciones escalares determinadas por la relación vectorial (1.6). Se resuelve el sistema (si ello es posible) respecto a las $n + m$ incógnitas x_1, \dots, x_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Los puntos (x_1, \dots, x_n) en los que se presentan los extremos relativos se encuentran entre las soluciones del sistema.

Los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ que se introdujeron para ayudarnos a resolver este tipo de problema se denominan **multiplicadores de Lagrange**. Se introduce un multiplicador por cada condición. La función f y las funciones de condición g_1, \dots, g_m se suponen diferenciables. El método es válido si el número de condiciones, m , es menor que el número de variables, n , y si no todos los determinantes jacobianos de las funciones de condición con respecto a m de las variables x_1, \dots, x_n son nulos para los valores extremos que se consideran.

Solución geométrica del ejemplo 1. Queremos determinar los puntos de una superficie dada S que están más próximos al origen. Un punto (x, y, z) del espacio está a distancia r del origen si y sólo si está en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Esta esfera es una superficie de nivel de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, que hay que minimizar. Si empezamos con $r = 0$ y aumentamos r hasta que la correspondiente superficie de nivel sea tangente a la superficie dada S , cada punto de contacto será un punto de S más próximo al origen.

Para determinar los puntos de contacto supongamos que S está definida por la ecuación $g(x, y, z) = 0$. Si S tiene plano tangente en un punto de contacto, dicho plano también debe ser tangente a la superficie de nivel en el mismo punto. Por lo tanto el vector gradiente de

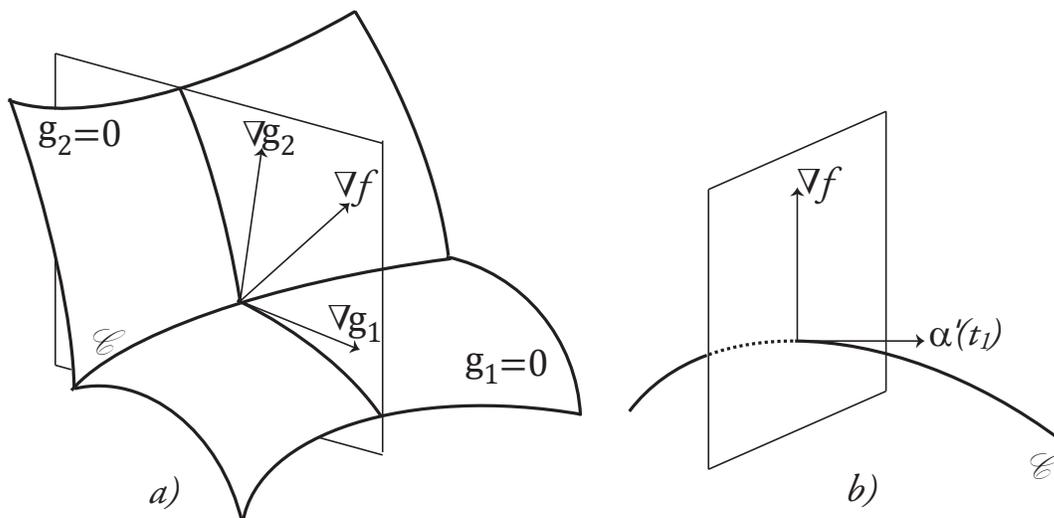


Figura 1.4:

la superficie $g(x, y, z) = 0$ debe ser paralelo al vector gradiente de la superficie de nivel de contacto $f(x, y, z) = r$. Entonces existe una constante λ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

en cada punto de contacto. Esa es la ecuación vectorial (1.6) lograda con el método de Lagrange cuando hay una sola condición.

Solución geométrica del ejemplo 2. Queremos obtener los valores extremos de una función que da la temperatura $f(x, y, z)$ sobre una curva dada \mathcal{C} . Si consideramos la curva \mathcal{C} como la intersección de dos superficies,

$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad g_2(x, y, z) = 0,$$

tenemos un problema de extremos con dos condiciones. Los dos vectores gradientes ∇g_1 y ∇g_2 son normales a esas superficies, luego también lo son a la curva \mathcal{C} de intersección. (Ver figura 1.4 a)). Si el vector gradiente ∇f de la función temperatura también es normal a \mathcal{C} en cada extremo relativo sobre \mathcal{C} . Ello implica que ∇f está en el mismo plano que ∇g_1 y ∇g_2 , luego si ∇g_1 y ∇g_2 son independientes podemos expresar ∇f como combinación lineal de ellos, es decir

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$$

Esta es la ecuación vectorial (1.6) obtenida con el método de Lagrange cuando existen dos condiciones.

Para demostrar que ∇f es normal a \mathcal{C} en un punto extremo imaginemos que \mathcal{C} está definida por una función vectorial $\alpha(t)$, variando t en un intervalo $[a, b]$. Sobre la curva \mathcal{C} la temperatura se convierte en una función de t , es decir $\varphi(t) = f(\alpha(t))$. Si φ tiene un

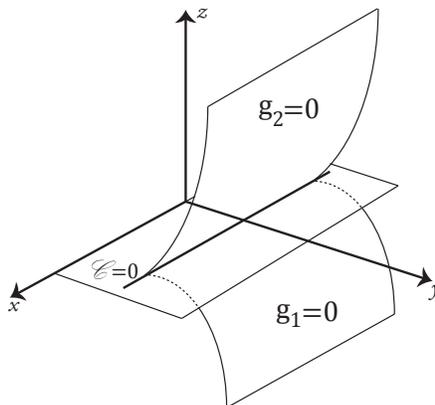


Figura 1.5:

extremo relativo en un punto interior t_1 de $[a, b]$ tiene que verificarse $\varphi'(t_1) = 0$. Por otra parte, la regla de la cadena nos dice que $\varphi'(t)$ viene dada por el producto escalar

$$\varphi'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Este producto es nulo en t_1 , luego ∇f es perpendicular a $\alpha'(t_1)$. Pero $\alpha'(t_1)$ es tangente a \mathcal{C} , por lo que $\nabla f(\alpha(t_1))$ está en el plano normal a \mathcal{C} , como muestra la figura 1.4 b).

Los dos vectores gradientes ∇g_1 y ∇g_2 son independientes si y sólo si su producto vectorial es no nulo. Este producto viene dado por

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)} \mathbf{i} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z, x)} \mathbf{j} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)} \mathbf{k}$$

Por consiguiente, la independencia de ∇g_1 y ∇g_2 significa que no todos los determinantes jacobianos del segundo miembro son cero. Como ya hemos observado, el método de Lagrange es aplicable siempre que esta condición se satisfaga.

Si ∇g_1 y ∇g_2 son dependientes el método puede fallar. Por ejemplo, supongamos que intentamos la aplicación del método de Lagrange para encontrar los valores extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ en la curva de intersección de las dos superficies $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$ siendo $g_1(x, y, z) = z$ y $g_2(x, y, z) = z^2 - (y - 1)^3$. Las dos superficies, un plano y un cilindro, se cortan a lo largo de la recta e dibujada en la figura 1.5. El problema tiene evidentemente una solución, debido a que $f(x, y, z)$ representa la distancia del punto (x, y, z) al eje z y esta distancia es un mínimo sobre \mathcal{C} cuando el punto es el $(0, 1, 0)$. Sin embargo, en este punto los vectores gradientes son $\nabla g_1 = \mathbf{k}$, $\nabla g_2 = \mathbf{0}$ y $\nabla f = 2\mathbf{j}$, y está claro que no existen escalares λ_1 y λ_2 que satisfagan la ecuación (1.6).

Ejemplo 1.5.3. Máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = xy$ en $x^2 + y^2 = 1$.

Como f es continua y el conjunto $\mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ es compacto, se sabe que

deben existir el máximo y el mínimo absolutos (que son además relativos).

Buscamos entonces por el procedimiento de multiplicadores de Lagrange los candidatos posibles, y comparando valores obtenemos máximo y mínimo.

La condición está dada por la función $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, entonces $\nabla g = (2x, 2y)$, por otro lado $\nabla f = (y, x)$. Entonces el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y + \lambda 2x = 0 \\ x + \lambda 2y = 0 \end{cases}$$

Despejando x de (3) y sustituyendo en (2) se obtiene $y(1 - 4\lambda^2) = 0$, de donde $y = 0$ o $\lambda = \pm 1/2$. Si ocurriera lo primero, entonces de (3) obtenemos $x = 0$, pero $y = x = 0$ no verifica (1). Por lo tanto se cumple lo segundo $\lambda = \pm 1/2$.

Si $\lambda = 1/2$, tenemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ p_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{matrix}$$

Si $\lambda = -1/2$, tenemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} p_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ p_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{matrix}$$

Los puntos p_1, p_2, p_3 y p_4 , son los "candidatos" a extremo.

Calculamos los valores de f : $f(p_1) = f(p_2) = -\frac{1}{2}$ y $f(p_3) = f(p_4) = \frac{1}{2}$. Entonces $-\frac{1}{2}$ mínimo absoluto, se da en p_1 y p_2 y $\frac{1}{2}$ máximo absoluto y se da en p_3 y p_4 .

Ejemplo 1.5.4. Hallar la mínima distancia al origen de puntos de $\mathcal{C} = \{(x, y) : (x - 1)^3 - y^2 = 0\}$. Tomamos la función cuadrado de la distancia al origen $f(x, y) = x^2 + y^2$ y la condición dada por la función $g(x, y) = (x - 1)^3 - y^2$. Entonces, los multiplicadores de Lagrange nos dicen que el sistema a resolver es

$$\begin{cases} (x - 1)^3 - y^2 = 0 \\ 2x + \lambda 3(x - 1)^2 = 0 \\ 2y - \lambda 2y = 0 \end{cases}$$

De (2), se obtiene $y = 0$ o $\lambda = 1$. Si $y = 0$ entonces, por (1), $x = 1$ pero no se cumple (3). Si $\lambda = 1$, sustituida en (2) nos da:

$$2x + 3(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 3 = 0.$$

La ecuación $3x^2 - 4x + 3 = 0$ no tiene raíces en \mathbb{R} , por lo tanto el sistema es incompatible. No tenemos entonces, candidatos a extremo. Sin embargo, intuitivamente, el mínimo debía existir. Lo que ocurre es que no hemos verificado la condición $\nabla g = 0$, $\nabla g = (3(x-1)^2, -2y)$ se anula en $(1, 0)$, que cumple $g(1, 0) = 0$. El punto $(1, 0)$ es entonces un candidato más a extremo, que será el mínimo buscado.

Capítulo 2

Curvas y Superficies

2.1. Curvas paramétricas

Sea α una función vectorial definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Cuando t va tomando los valores de I , la función $\alpha(t)$ describe un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n llamado **traza de la función**. Si α es continua en I la traza se llama: **curva**, con mayor precisión, es la curva descrita por α . A la función α se la llama **parametrización** de la curva.

Notación: $\mathcal{C} = \alpha(I)$.

Observar que funciones distintas pueden originar el trazado de la misma curva en formas distintas, por ejemplo, en direcciones distintas o con velocidades distintas. Al estudiar las integrales de línea nos interesará no sólo el conjunto de puntos de una curva sino la manera como tal curva ha sido originada, esto es, la función α .

Definición 2.1.1. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado finito de \mathbb{R} . Una función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en I se llama **camino continuo** en \mathbb{R}^n . El camino se llama **regular** si existe la derivada α' , $\alpha'(t) \neq \vec{0} \forall t \in I$ y α' es continua en el intervalo abierto (a, b) . El camino

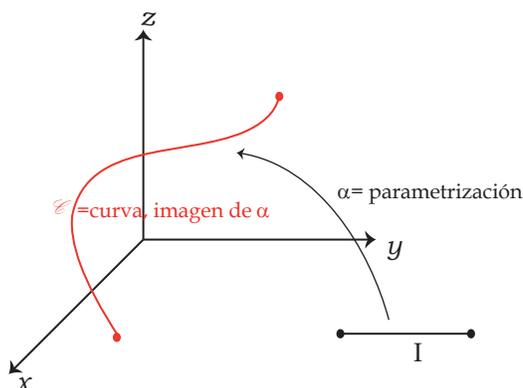


Figura 2.1: Parametrización α y curva \mathcal{C}

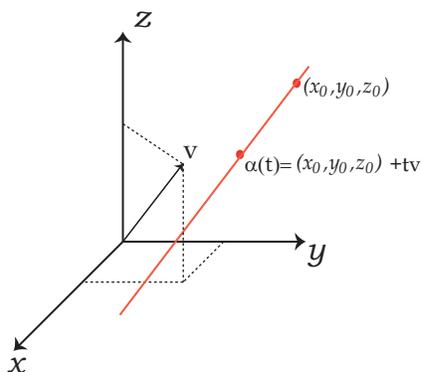
se llama **regular a trozos** si el intervalo $I = [a, b]$ puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales el camino es regular.

Definición 2.1.2. 1. Decimos que una curva es **simple** si admite una parametrización de clase C^1 e inyectiva.

2. Decimos que una curva es **cerrada** si admite una parametrización $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$.

3. Decimos que una curva es **cerrada simple** si admite una parametrización $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ y es inyectiva en $[a, b)$.

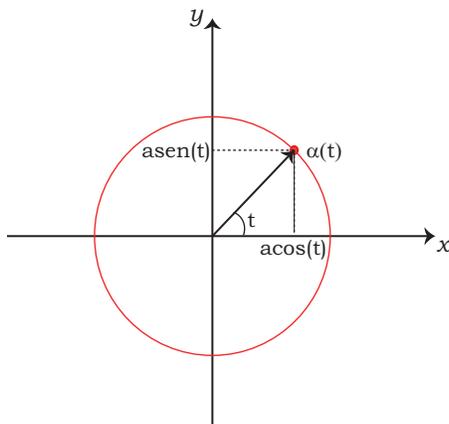
Ejemplo 2.1.1. 1. **Recta en el espacio.** Sea \mathcal{C} la recta pasando por el punto (x_0, y_0, z_0) con dirección $\vec{v} = (a, b, c)$.



Una parametrización de la recta es

$$\alpha) \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} .$$

2. **Circunferencia en el plano.** Sea \mathcal{C} la circunferencia de centro el origen y radio a en el plano.



Sea $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ una parametrización de \mathcal{C} . Otra parametrización de la misma curva es $\beta(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t)$, $t \in [0, \pi]$. La diferencias entre estas dos parametrizaciones es la velocidad con la cual recorren la curva.

Definición 2.1.3. Sea α una curva paramétrica (es decir, una curva con parametrización α) de clase C^1 , $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Definimos el **vector velocidad** de la curva en un punto t como

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

La **velocidad** de α en t es el escalar

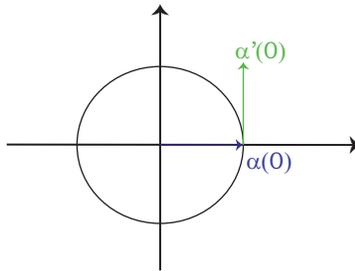
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

Observación 2.1.4. Si existe el vector velocidad y es no nulo entonces es tangente a la curva.

Ejemplo 2.1.2. Calcular el vector velocidad de la curva paramétrica $\alpha(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$, $t \in [0, 2\pi]$ en $t = 0$. Derivando obtenemos que

$$\alpha'(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

en $t = 0$ $\alpha(0) = (r, 0)$ y $\alpha'(0) = (0, r\omega)$.

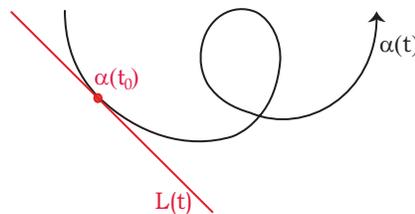


Definición 2.1.5. Sea α una curva paramétrica. Definimos el **versor tangente** como el versor tangente a la curva (si existe) con sentido que indica la orientación de la curva. Si existe $\alpha'(t)$ y es $\neq 0$, entonces el versor tangente es

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Definición 2.1.6. Sea α una curva paramétrica de clase C^1 con $\alpha'(t_0) \neq 0$. La **recta tangente** a α en $\alpha(t_0)$ es

$$L(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0)$$



Ejemplo 2.1.3. Sea α la curva que pasa en $t = 0$ por $(3, 6, 5)$ con vector tangente $(1, -1, 0)$. Calcular la recta tangente.

$$L(t) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0)$$

Observación 2.1.7. La tangente es la trayectoria que seguiría el punto si se “libera” de la curva en el instante t_0 .

Ejemplo 2.1.4. Una partícula sigue la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos \pi t)$. Se va por la tangente en el instante $t = 1$. Donde está en el instante $t = 3$?

$\alpha'(1) = (e, -e^{-1}, 0)$ y $\alpha(1) = (e, e^{-1}, -1)$, entonces

$$L(t) = (e, e^{-1}, -1) + (t - 1)(e, -e^{-1}, 0)$$

y en $t = 3$ la partícula se encuentra en $L(3) = (3e, -e^{-1}, -1)$.

2.1.1. Reparametrizaciones

Sabemos que dos funciones distintas pueden tener la misma traza. Nos planteamos ahora bajo qué condiciones dos funciones $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumplen que $\alpha(I) = \beta(J)$. Es sencillo comprobar que, si esto se cumple, existe una aplicación $\varphi : J \rightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$, es decir, $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ para cada $s \in J$. A priori la función φ no tiene por qué ser diferenciable (por ejemplo, si $\alpha(I) = \beta(J) = \{p_0\}$ basta tomar como φ cualquier función). En caso de ser φ diferenciable tenemos que

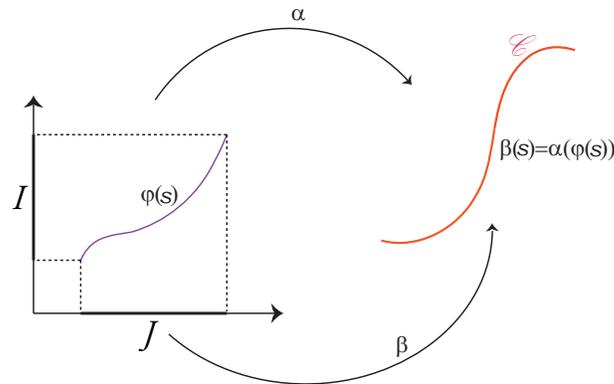
$$\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)$$

por la regla de la cadena. De esta relación vemos que, aunque α fuese regular, podría ocurrir que β no lo fuese si φ' se anula en algún instante $s \in J$. Para poder deducir que β es regular si lo es α necesitamos imponer que $\varphi'(s) \neq 0$ para cada $s \in J$, lo que equivale a que $\varphi : J \rightarrow \varphi(J)$ sea un difeomorfismo entre intervalos de \mathbb{R} .

Definición 2.1.8. Sea \mathcal{C} una curva con parametrización $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Llamaremos **reparametrización** de α a cada $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta = \alpha \circ \varphi$, donde $\varphi : J \rightarrow I$ es un difeomorfismo entre intervalos de \mathbb{R} que llamaremos **cambio de parámetros**. Diremos que la reparametrización es **creciente o positiva** (respectivamente **decreciente o negativa**) si $\varphi'(s) > 0$ (respectivamente $\varphi'(s) < 0$), para cada $s \in J$.

En estas condiciones se tiene que β es regular si y sólo si α es regular. Además, se

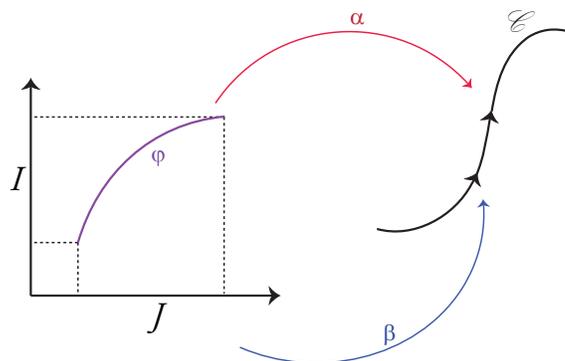
cumple que $\beta(J) = \alpha(I)$.



Observación 2.1.9. Si pensamos en las curvas como conjuntos de puntos $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ entonces trabajaremos con aquellas que son trazas de funciones regulares. Esto garantiza la existencia de rectas tangentes, cuya evolución sobre la curva nos ayudará a estudiar como la curva se dobla. Además, cualquier parametrización regular de \mathcal{C} será una herramienta útil para realizar este estudio (cálculo de rectas tangentes y normales, curvaturas, etc).

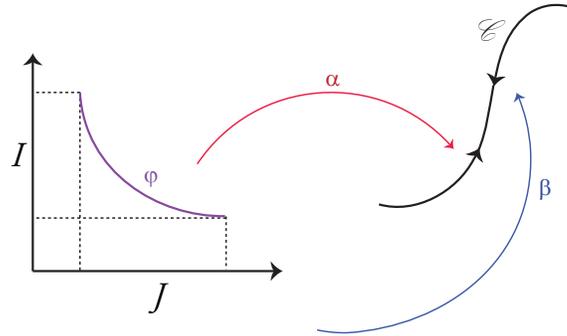
Puede ocurrir que una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ sea a la vez la imagen de dos parametrizaciones, siendo una de ellas regular y la otra no. Por ejemplo, la parábola plana $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ puede parametrizarse por medio de las funciones $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) := (t, t^2)$ (regular) y $\beta(t) := (t^3, t^6)$ (no regular). Esto significa que β no es una parametrización adecuada de \mathcal{C} (no se puede emplear β para calcular la recta tangente en el origen). Físicamente estamos recorriendo \mathcal{C} de dos maneras distintas: en una de ellas la velocidad nunca se anula y en la otra sí.

Observación 2.1.10. Si la reparametrización es creciente entonces β preserva la orientación de la curva \mathcal{C} dada por α .



Si la reparametrización es decreciente entonces β revierte la orientación de la curva \mathcal{C} dada

por α .



Ejemplo 2.1.5. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = p + tv$ y $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el difeomorfismo $\varphi(s) = 2s$. Entonces $\beta := \alpha \circ \varphi$ es una reparametrización positiva de α . Se tiene que $\beta(s) = p + (2s)v$, para cada $s \in \mathbb{R}$. Notar que $\alpha'(t) = v$ para cada $t \in \mathbb{R}$, mientras que $\beta'(s) = 2v$ para cada $s \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.6 (Cambio de sentido). . Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva. Definimos su *cambio de sentido* $\alpha_{op} : (-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\alpha_{op}(s) := \alpha(-s)$. Es obvio que $\alpha_{op} = \alpha \circ \varphi$, donde $\varphi : (a, b) \rightarrow (-b, -a)$ es el difeomorfismo decreciente $\varphi(s) := -s$. En particular, α_{op} es una reparametrización decreciente de α , por lo que $\alpha_{op}((-b, -a)) = \alpha((a, b))$. El efecto que esta reparametrización tiene es el de recorrer la misma trayectoria en sentido contrario. Notar además que $\alpha'_{op}(s) = -\alpha'(-s)$, por lo que el módulo de la velocidad se conserva.

Definición 2.1.11. Sea \mathcal{C} una curva parametrizable. Decimos que dos parametrizaciones α y β de \mathcal{C} son **equivalentes** si una es reparametrización de la otra.

De esta forma, dos parametrizaciones equivalentes o bien preservan la orientación o bien la invierten, pero no puede darse un caso intermedio. La definición anterior nos lleva naturalmente a preguntarnos lo siguiente:

- (1) ¿ Son todas las parametrizaciones de una misma curva necesariamente equivalentes?
- (2) En caso afirmativo, ¿existe alguna parametrización más “natural” que las otras?

La respuesta a (1) es en general no, como lo muestra la siguiente curva y las dos parametrizaciones cuyas orientaciones no son comparables (respecto a la orientación no podemos decir ni que se preserva ni que se invierte). Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.12. *Sea \mathcal{C} una curva simple y regular. Si \mathcal{C} no es cerrada, entonces todas sus parametrizaciones regulares son inyectivas y equivalentes. Cuando \mathcal{C} es una curva cerrada, se tiene que todas sus parametrizaciones inyectivas en el interior de su dominio son equivalentes.*

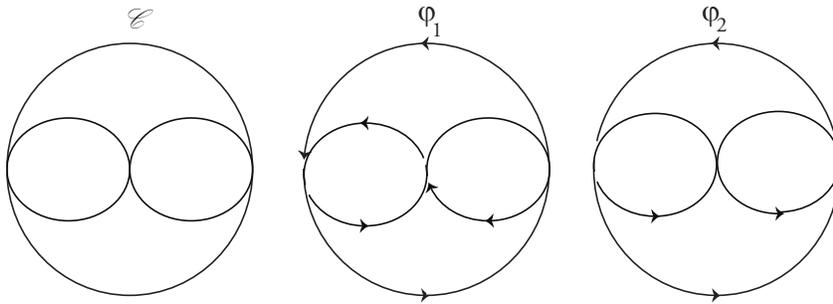
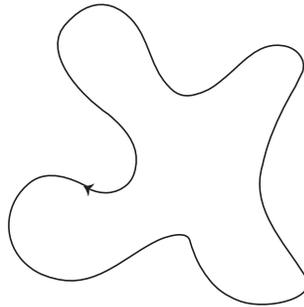


Figura 2.2: Parametrizaciones no equivalentes para la misma curva \mathcal{C} .

En esta situación, una parametrización regular φ separa en dos al conjunto de parametrizaciones regulares:

- Las que tienen la misma orientación que φ (que llamaremos *orientación positiva*), y
- Las que tienen la orientación opuesta (que se llamara *orientación negativa*)

Evidentemente las nociones de orientación positiva y negativa quedan determinadas por la parametrización inicial que sirve de referencia. Existe sin embargo una convención en el caso de curvas planas cerradas y simples, esta es el escoger la orientación positiva como aquella obtenida al recorrer la curva en sentido antihorario (es decir contrario a las agujas del reloj), tal como se muestra en la siguiente figura.



2.1.2. Longitud de arco

En esta sección estudiaremos un primer invariante geométrico para curvas. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva paramétrica y $[a, b] \subset I$. Queremos medir el arco de la traza de α comprendido entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$, es decir, nos interesa calcular la longitud de $\alpha([a, b])$. Para ello seguiremos un proceso similar al que conduce a la noción de área encerrada por el gráfico de una función continua. Geométricamente, parece claro que si consideramos poligonales

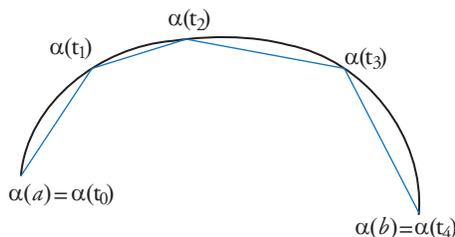


Figura 2.3: Una poligonal inscrita en la curva

que se apoyan sobre puntos de $\alpha([a, b])$ entonces la longitud de estas poligonales es una aproximación de la longitud de $\alpha([a, b])$ que será más precisa cuantos más puntos tenga la poligonal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}^3$. Se llama **segmento determinado por p y q** al conjunto:

$$[p, q] := \{(1-t)p + tq : t \in [0, 1]\} = \{p + t(q-p) : t \in [0, 1]\}.$$

Si $p = q$ entonces $[p, q] = \{p\}$. Si $p \neq q$, los puntos de $[p, q]$ son los de la recta $p + \lambda(q-p)$. Es natural definir la **longitud del segmento** $[p, q]$ como el número

$$L([p, q]) := d(p, q) = |q - p|.$$

Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva paramétrica continua y P una partición de $[a, b]$, es decir, una familia finita $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$. Los puntos $\alpha(t_k)$ con $k = 0, \dots, n$ determinan una **poligonal** $\cup_{k=0}^{n-1} [\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})]$, que se apoya en la traza de α , y cuya longitud está dada por:

$$L(\alpha, P) := \sum_{k=0}^{n-1} L([\alpha(t_k), \alpha(t_{k+1})]) = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha(t_{k+1}) - \alpha(t_k)|.$$

Llamaremos diámetro de una partición P a $|P| = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$.

Nótese que $L(\alpha, P)$ es una aproximación, en general muy inexacta, de la longitud de $\alpha([a, b])$. Obviamente $L(\alpha, P) > 0$. Además, aplicando la desigualdad triangular tenemos que si P_1 y P_2 son dos particiones de $[a, b]$ con $P_1 \subseteq P_2$, entonces $L(\alpha, P_1) \leq L(\alpha, P_2)$. Parece intuitivo que cuantos más puntos tenga P , más cercano al valor deseado estará $L(\alpha, P)$. Esto es justamente lo que dice el siguiente resultado:

Proposición 2.1.13. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva paramétrica de clase C^1 y $[a, b] \subset I$, entonces:

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} L_a^b(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad (2.1)$$

Después de la proposición anterior podemos definir la longitud de un arco de curva del siguiente modo

Definición 2.1.14. Dada una curva paramétrica de clase C^1 regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un intervalo $[a, b] \subset I$ definimos la **longitud del arco de curva** $\alpha([a, b])$ como

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Para curvas en \mathbb{R}^3 , si notamos a la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la fórmula es

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt,$$

y para curvas en \mathbb{R}^2 , $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la fórmula es

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Ejemplos 2.1.1. 1. Dados $p \in \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$ con $v \neq 0$, definimos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\alpha(t) := p + tv$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Observar que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$, se tiene que $\alpha([a, b]) = [\alpha(a), \alpha(b)]$. Como cabría esperar se cumple que:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \|v\|(b-a) = \|\alpha(b) - \alpha(a)\| = L([\alpha(a), \alpha(b)]).$$

2. Sean $p_0 \in \mathbb{R}^2$ y $R \neq 0$. Definimos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $\alpha(t) := p_0 + R(\cos t, \sin t)$. Sabemos que $\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1(p_0, |R|)$. Notar que en $[0, 2\pi]$ la curva α da una vuelta completa a $\mathbb{S}^1(p_0, |R|)$ comenzando en $p_0 + R(1, 0)$. Entonces, la longitud de $\mathbb{S}^1(p_0, |R|)$ se puede calcular

$$L_0^{2\pi}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} |R| dt = 2\pi|R|.$$

Observemos que en $[0, 4\pi]$ la curva α da dos vueltas completas a $\mathbb{S}^1(p_0, |R|)$. Es por ello que $L_0^{4\pi}(\alpha) = 4\pi|R|$. Esto muestra que dos curvas pueden tener la misma traza y diferente longitud.

3. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y φ de clase C^∞ en \mathbb{R} . Definimos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $\alpha(t) := (t, \varphi(t))$, que parametriza el gráfico $G(\varphi)$. Entonces, se tiene que:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} dt$$

que es la expresión conocida para la longitud de un gráfico.

Ejemplo 2.1.7. Hallar la longitud de arco de la hélice definida por $\rho : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, \sqrt{5}t)$.

El vector velocidad es $\rho'(t) = (-2 \operatorname{sen} 2t, 2 \cos 2t, \sqrt{5})$ que tiene módulo

$$\|\rho'(t)\| = \sqrt{4(\operatorname{sen} 2t)^2 + 4(\cos 2t)^2 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

Entonces la longitud de arco de ρ es

$$L_0^{4\pi}(\rho) = \int_0^{4\pi} \|\rho'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} 3 dt = 12\pi.$$

Lema 2.1.15. Sea \mathcal{C} una curva con parametrización $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y consideremos $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización, entonces

$$L_a^b(\alpha) = L_c^d(\beta),$$

para $[a, b] \subset I$ y $[c, d] = \varphi^{-1}([a, b])$ con $\varphi : J \rightarrow I$ difeomorfismo tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$.

Demostración. Como $\beta = \alpha \circ \varphi$ entonces $\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)$. Por lo tanto

$$L_c^d(\beta) = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Donde el último igual es una consecuencia del teorema de cambio de variable, donde $t = \varphi(s)$. \square

Este resultado nos permite realizar la siguiente definición.

Definición 2.1.16. Sea \mathcal{C} una curva parametrizable y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización inyectiva de clase C^1 regular. La **longitud de arco** de \mathcal{C} está definida como

$$L(\mathcal{C}) = L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

2.1.3. Curvas parametrizadas por longitud de arco

En Geometría Diferencial es útil disponer de curvas que, además de ser regulares, cumplan una propiedad de normalización que será práctica para probar que ciertos vectores sobre la curva son unitarios o que ciertas funciones sobre la curva se anulan.

Observación 2.1.17. Observar que si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$, entonces $L_a^t(\alpha) = t - a$, es decir la longitud del arco coincide con la del segmento $[a, t]$, y recíprocamente, si ocurre esto último, entonces $\|\alpha'(t)\| = 1$. Además si $a = 0$, entonces $L_0^t(\alpha) = t$.

Definición 2.1.18 (Curva parametrizada por longitud de arco). Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular. Diremos que dicha curva está parametrizada por **longitud de arco** si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Proposición 2.1.19. *Toda curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada regular se puede parametrizar por longitud de arco.*

Demostración. Dado $t_0 \in I$, podemos definir la función $L : I \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds,$$

la función $\|\alpha'(s)\|$ es, en general, continua, luego la función L es derivable con $L'(t) = \|\alpha'(t)\|$, pero al ser α regular tenemos que L es de clase C^1 y creciente, por tanto, si $J = L(I)$, $L : I \rightarrow J$ es una biyección y su inversa $g : J \rightarrow I$, es de clase C^1 , es decir, se trata de un difeomorfismo, con lo cual $\beta := \alpha \circ g$ es una representación de α .

Veamos que β es una parametrización por la longitud del arco. En efecto, observemos que $g(L(t)) = t$, entonces si derivamos

$$g'(L(t))L'(t) = 1; \quad \text{y por tanto} \quad g'(L(t)) = \frac{1}{L'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Por lo tanto

$$\beta'(s) = \alpha'(g(s))g'(s) = \frac{\alpha'(g(s))}{\|\alpha'(g(s))\|}$$

de donde se deduce que $\|\beta'(s)\| = 1$. □

La función $L(t)$ se llama **función de longitud de arco**.

Ejemplo 2.1.8. Consideremos la hélice $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Hallar la parametrización por longitud de arco de esta curva.

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Entonces

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\tau = \sqrt{a^2 + b^2} t \Rightarrow g(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La parametrización de la hélice por longitud de arco es

$$\gamma(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{c} \right), a \sin \left(\frac{s}{c} \right), b \frac{s}{c} \right),$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Realizaremos a continuación un estudio desde el punto de vista geométrico de las curvas. Queremos definir parámetros locales que describan propiedades geométricas de las curvas. Para realizar este estudio trabajaremos con curvas parametrizadas por longitud de arco.

Ejercicio: Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ funciones diferenciables, y $\|\alpha'(s)\| \neq 0$. Probar

1. $\langle \alpha, \beta \rangle' = \langle \alpha', \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle$

$$2. (\alpha \wedge \beta)' = \alpha' \wedge \beta + \alpha \wedge \beta'$$

$$3. \|\alpha\|' = \langle \alpha, \alpha' \rangle / \|\alpha\|$$

Lema 2.1.20. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\|\beta(s)\| = c$ para todo $s \in I$. Entonces $\beta'(s) \perp \beta(s)$ para todo $s \in I$.

Demostración. $\|\beta(s)\| = c \Rightarrow \langle \beta(s), \beta(s) \rangle = c^2$. Derivando obtenemos que

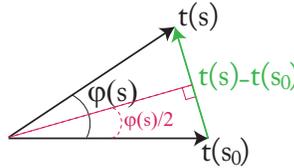
$$\langle \beta'(s), \beta(s) \rangle + \langle \beta(s), \beta'(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \beta'(s), \beta(s) \rangle = 0 \Rightarrow \beta'(s) \perp \beta(s) \forall s \in I.$$

□

Definición 2.1.21. Sea α parametrización por longitud de arco de clase C^2 de una curva. Definimos la **curvatura** de α en s como el escalar

$$k(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\alpha''(s)\|.$$

Observación 2.1.22. Veamos que $k(s)$ nos da una idea de la rapidez con que la curva cambia su dirección. Sean $s_0, s \in I$ y $\varphi(s)$ el ángulo que forman $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{t}(s_0)$. Como $\|\mathbf{t}(s)\| = \|\mathbf{t}(s_0)\| = 1$ tenemos que $\|\mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s_0)\| = 2 \sin\left(\frac{\varphi(s)}{2}\right)$.



Si tomamos el límite cuando $s \rightarrow s_0$ tenemos que $\varphi(s) \rightarrow 0$ y $\|\mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s_0)\| \sim \varphi(s) = \varphi(s) - \varphi(s_0)$. Entonces

$$\|\alpha''(s_0)\| = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|\mathbf{t}(s) - \mathbf{t}(s_0)\|}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi(s) - \varphi(s_0)}{s - s_0} = \varphi'(s_0).$$

Entonces $k(s_0) = \varphi'(s_0)$ mide la rapidez con que cambia el ángulo de la tangente en el punto s_0 .

Observación 2.1.23. La función curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Si $k(s) > 0$ para todo $s \in I$, entonces $\mathbf{t}'(s)$ no se anula nunca.

Teorema 2.1.24. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 tal que $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. Entonces

$$k(s) = 0 \text{ en } I \Leftrightarrow \beta(I) \text{ está contenida en una recta.}$$

Demostración. (\Rightarrow) $\alpha''(s) = 0$ en I entonces integrando $\alpha'(s) = cte = v$ en $I \Rightarrow \alpha(s) = vs + u$, con u, v constantes. Las ecuaciones $\alpha(s) = vs + u$, $s \in \mathbb{R}$ definen una recta en el espacio.

(\Leftarrow) $\alpha(I)$ contenido en una recta, puedo escoger dos versores u, v perpendiculares a la recta y entre sí. Se cumple

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), u \rangle = 0$$

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle = 0$$

Derivando, obtenemos que $\langle \alpha'(s), u \rangle = 0$, $\langle \alpha'(s), v \rangle = 0$. Entonces $\alpha'(s) \perp u$, $\alpha'(s) \perp v \Rightarrow \alpha'(s)$ es colineal con $u \wedge v$

$$\alpha'(s) = \lambda(s)(u \wedge v), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\|\alpha'(s)\| = |\lambda(s)| = 1$ entonces $\lambda(s) = \pm 1$ para todo $s \in I$. Como $\lambda(s)$ es continua sólo se puede tomar uno de los dos valores, entonces $\lambda(s)$ es constante. Por lo tanto $\lambda'(s) = 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$\alpha''(s) = \lambda'(s)(u \wedge v) = 0 \Rightarrow k(s) = 0.$$

□

Ejemplo 2.1.9. Sea $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio R . La parametrización por longitud de arco es

$$\alpha(s) = \left(R \cos \left(\frac{s}{R} \right), R \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right)$$

Entonces

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{R} \left(\cos \left(\frac{s}{R} \right), \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right) \Rightarrow k(s) = \frac{1}{R}.$$

Cuanto mayor es el radio de la circunferencia más lentamente se curva y menor es la curvatura.

Definición 2.1.25. Sea α parametrización por longitud de arco de clase C^2 , $k(s) \neq 0$. El número $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$ se llama **radio de curvatura**.

Definición 2.1.26. Sea α parametrización de clase C^2 , $\alpha''(s) \neq 0$. Definimos el **vector normal unitario (versor normal)** a la curva α en $\alpha(s)$ como

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}.$$

Observación 2.1.27. Observar que $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua, y ortogonal a \mathbf{t} en cada $s \in I$: Como $\mathbf{t}(s)$ tiene módulo constante deducimos que $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{t}(s)'$. Entonces $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{n}(s)$. El vector tangente a la curva y el normal son ortogonales.

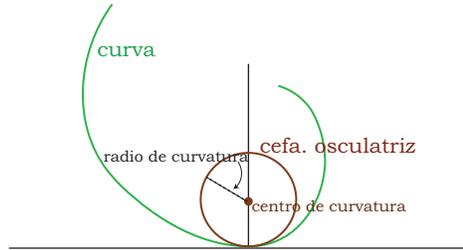
Ejemplo 2.1.10. Consideremos la curva $\alpha(s) = (R \cos(\frac{s}{R}), R \sin(\frac{s}{R}))$. Entonces

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{R} \left(\cos \left(\frac{s}{R} \right), \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right),$$

entonces $k(s) = \frac{1}{R}$ y $\mathbf{n}(s) = -(\cos(\frac{s}{R}), \sin(\frac{s}{R}))$.

Definición 2.1.28. El plano que pasa por $\alpha(s)$ determinado por los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ se llama **plano osculador**. Al punto $Q(s) = \alpha(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s)$ se llama **centro de curvatura**.

La circunferencia en plano osculador de centro $Q(s)$ y radio $\rho(s)$ se llama **circunferencia osculatriz**.



Definición 2.1.29. Dada una curva \mathcal{C} parametrizada por α de clase C^2 tal que $\alpha''(s) \neq 0$ definimos el **versor binormal** y lo notamos \mathbf{b} , como

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}.$$

2.1.4. Triedro de Frenet

Sea \mathcal{C} una curva con parametrización $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, vector tangente $\mathbf{t}(s)$, vector normal $\mathbf{n}(s)$ y vector binormal $\mathbf{b}(s)$ en cada punto de la curva $P = \alpha(s)$.

Definición 2.1.30. El conjunto $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ se lo llama **triedro de Frenet** de la curva en s y en cada punto $P = \alpha(s)$ de la curva \mathcal{C} forma un sistema de referencia de \mathbb{R}^3 (una base ortonormal del mismo).

Definición 2.1.31. El plano por $\alpha(s)$ con vectores $\mathbf{b}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ se llama **plano normal** a la curva y el plano por $\alpha(s)$ con vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ se llama **plano rectificante**.

Proposición 2.1.32. Sea α de clase C^3 tal que $\alpha'(s) \neq 0$ y $\alpha''(s) \neq 0$ para todo s . Entonces el vector $\mathbf{b}'(s)$ es colineal con $\mathbf{n}(s)$.

Demostración. Como $\|\mathbf{b}(s)\| = 1$ tenemos que $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$. Además $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, entonces $\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}' = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}'$ por lo tanto $\mathbf{b}' \perp \mathbf{t}$. De estas dos propiedades concluimos que \mathbf{b}' es colineal con \mathbf{n} . \square

Definición 2.1.33. Como $\mathbf{b}'(s)$ es colineal con $\mathbf{n}(s)$ existe $\tau(s)$ escalar tal que

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s),$$

$\tau(s)$ se llama **torsión** de α en s .

Observar que la variación de \mathbf{b} con s corresponde a la variación del plano osculador (perpendicular a \mathbf{b}). Por lo tanto $\tau(s)$ mide la rapidez con la cual la curva $\alpha(s)$ “se sale” de un plano.

Teorema 2.1.34. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^3 tal que $\|\alpha'(s)\| = 1$, $k(s) \neq 0$ para todo s . Entonces*

$\tau(s) = 0$ en $I \Leftrightarrow \alpha(I)$ está contenida en un plano.

Demostración. (\Rightarrow) $\tau = 0$ entonces $\mathbf{b}'(s) = 0$ entonces $\mathbf{b}(s) = b_0$ constante. Consideremos

$$(\alpha(s) \cdot b_0)' = \alpha'(s) \cdot b_0 + \alpha(s) \cdot b_0' = \alpha'(s) \cdot b_0 = \mathbf{t} \cdot b_0 = 0.$$

Entonces $\alpha(s) \cdot b_0 = d$ (constante), de lo cual deducimos que $\alpha(s) \cdot b_0 - \alpha(s_0) \cdot b_0 = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot b_0 = 0$ para todo $s \in I$. Entonces $\alpha(s)$ está en el plano ortogonal a b_0 pasando por $\alpha(s_0)$.

(\Leftarrow) Supongamos $\alpha(s)$ pertenece a un plano π para todo $s \in I$. Sea u un versor normal al plano π . Entonces $\alpha(s) - \alpha(s_0) \perp u$ para todo $s \in I$. Por lo tanto $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot u = 0$, para todo $s \in I$.

Derivando esta igualdad obtenemos que $\alpha'(s) \cdot u = 0 \Rightarrow \mathbf{t}(s) \cdot u = 0$ ($\mathbf{t} \perp u$). Derivando nuevamente obtenemos que $\mathbf{n} \cdot u = 0$ por lo cual $\mathbf{n} \perp u$. De estas dos condiciones deducimos que u es colineal con $\mathbf{b}(s)$ para todo $s \in I$. Entonces $\mathbf{b}(s) = \pm u$ para todo $s \in I$. Como $\mathbf{b}(s)$ es continua tenemos que $\mathbf{b}(s)$ es constante y por lo tanto $\mathbf{b}'(s) = 0$, de lo cual deducimos que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$. \square

Fórmulas de Frenet

Queremos saber como varía el triedro de Frenet a lo largo de la curva, para esto estudiaremos las derivadas $\mathbf{t}'(s)$, $\mathbf{n}'(s)$ y $\mathbf{b}'(s)$.

Proposición 2.1.35. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco tal que $k(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces se cumple que*

(a) $\mathbf{b}'(s)$ está en la dirección de $\mathbf{n}(s)$ para cada $s \in I$. Más aun, $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$.

(b) $\tau(s) = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$.

(c) $k(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle$.

(d) $\mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)$.

Demostración.

(a) Es justamente la Proposición 2.1.33.

(b) $\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle -\tau(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\tau(s)$.

Para la otra igualdad derivemos $\langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$

$$\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = 0,$$

por lo tanto $\tau(s) = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle$.

(c) Ya sabemos que $\mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$, entonces multiplicando escalarmente por $\mathbf{n}(s)$ obtenemos que $k(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$. Por otro lado, como $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$, derivando obtenemos

$$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle = 0$$

de lo cual se deduce que $k(s) = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle$.

(d) Finalmente, para obtener la última ecuación derivamos la igualdad $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(s) &= \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) = -\tau(s)(\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s)) + \mathbf{b}(s) \wedge (k(s)\mathbf{n}(s)) \\ &= \tau(s)(\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)) - k(s)(\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{b}(s)) = \tau(s)\mathbf{b}(s) - k(s)\mathbf{t}(s). \end{aligned}$$

□

Ecuaciones de Frenet: Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco de clase C^3 con $\alpha''(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) &= -k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s). \end{aligned}$$

Corolario 2.1.36. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco de clase C^3 con $\alpha''(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$\tau(s) = \frac{1}{k(s)^2} (\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)).$$

Demostración. Recordar que $(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w$.

Para probar esto usaremos la segunda fórmula de Frenet:

$$\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}(s) \cdot (-k(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)) = -k(s)\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) = \tau(s).$$

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{n}'(s) = (\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)) \cdot \left(\frac{\alpha''(s)}{k(s)} \right)' \\ &= \left(\alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \right) \cdot \left(\frac{\alpha'''(s)}{k(s)} + \alpha''(s) \left(\frac{-k'(s)}{k(s)^2} \right) \right) \\ &= \left(\alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \right) \cdot \frac{\alpha'''(s)}{k(s)} - \left(\alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \right) \cdot \alpha''(s) \left(\frac{k'(s)}{k^2(s)} \right) \\ &= \left(\alpha'(s) \wedge \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \right) \cdot \frac{\alpha'''(s)}{k(s)} = \frac{1}{k(s)^2} (\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)) \cdot \alpha'''(s) \\ &= \frac{1}{k(s)^2} (\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.1.11. Consideremos la hélice parametrizada por longitud de arco

$$\alpha(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{c} \right), a \sin \left(\frac{s}{c} \right), b \frac{s}{c} \right),$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \operatorname{sen} \left(\frac{s}{c} \right), \frac{a}{c} \cos \left(\frac{s}{c} \right), \frac{b}{c} \right), \\ \alpha''(s) &= -\frac{a}{c^2} \left(\cos \left(\frac{s}{c} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{c} \right), 0 \right) \Rightarrow k(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \\ \mathbf{n}(s) &= -\left(\cos \left(\frac{s}{c} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{c} \right), 0 \right) \quad \text{paralelo al plano } xy, \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \left(-\frac{b}{c} \operatorname{sen} \left(\frac{s}{c} \right), -\frac{b}{c} \cos \left(\frac{s}{c} \right), \frac{a}{c} \right), \\ \mathbf{b}'(s) &= \frac{b}{c^2} \left(\cos \left(\frac{s}{c} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{c} \right), 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \mathbf{n}(s),\end{aligned}$$

Entonces

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

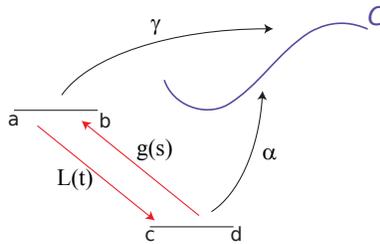
En este ejemplo tanto la torsión como la curvatura son constantes.

Cálculo del triedro de Frenet, curvatura y torsión

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cualquiera de clase C^3 regular tal que $\|\gamma''(t)\| \neq 0, \forall t \in I$. Un camino para hallar $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, k, \tau$ sería reparametrizar la curva por longitud de arco. Otra opción es ver las fórmulas explícitas sin hacer el cambio de parametrización.

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} \\ k &= \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}.\end{aligned}$$

Veamos como deducir la fórmula para la curvatura. Para esto consideremos $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ reparametrización por longitud de arco. El siguiente diagrama será de suma importancia para lo que haremos de aquí en más teniendo en cuenta que la función $L = L(t)$ es la función longitud de arco y $g = g(s)$ la función inversa de L .



Sabemos que $\gamma(t) = \alpha(L(t))$ por lo tanto, usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\gamma'(t) = \alpha'(L(t))L'(t) \text{ y } \gamma''(t) = \alpha''(L(t))(L'(t))^2 + \alpha'(L(t))L''(t)$$

Luego si hacemos el producto vectorial entre γ' y γ'' obtenemos:

$$\gamma' \wedge \gamma'' = \alpha'(L(t))L'(t) \wedge \alpha''(L(t))(L'(t))^2 = (L'(t))^3(\alpha'(L(t)) \wedge \alpha''(L(t)))$$

Esto último implica que

$$\|\gamma' \wedge \gamma''\| = |L'(t)|^3 \|\alpha'(L(t)) \wedge \alpha''(L(t))\|$$

Y por otro lado:

$$\|\gamma'\| = |L'(t)| \|\alpha'(L(t))\| = |L'(t)|$$

Entonces sustituyendo las dos últimas expresiones se obtiene:

$$\frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \|\alpha'(L(t)) \wedge \alpha''(L(t))\| = \|\alpha'(L(t))\| \|\alpha''(L(t))\| \sin(\theta(L))$$

donde $\theta(L)$ es el ángulo que forman $\alpha'(L(t))$ y $\alpha''(L(t))$. Dado que $\alpha'(L(t))$ y $\alpha''(L(t))$ son perpendiculares y que $\|\alpha'\| = 1$ se obtiene que

$$\frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \|\alpha''(L(t))\|$$

La cual justamente coincide con la curvatura y por lo tanto concluye la prueba.

Para deducir la fórmula de τ hay que calcular $(\gamma', \gamma'', \gamma''')$ en función de $(\alpha', \alpha'', \alpha''')$. La cuenta es análoga y queda como ejercicio para el lector.

2.2. Integrales de línea

En esta sección estudiaremos las integrales de campos escalares y vectoriales sobre curvas. Primero introduciremos los conceptos de campo escalar y campo vectorial.

Una integral de línea o curvilínea es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva. Las integrales de línea son muy importantes en matemática pura y aplicada, y también en física: se presentan al estudiar el trabajo, la energía potencial, el flujo de calor, el cambio en la entropía, la circulación de un fluido, y otras cuestiones que involucran el comportamiento de un campo escalar o vectorial a lo largo de una curva.

Definición 2.2.1. Un **campo escalar** es una función

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Un **campo vectorial** es una función vectorial

$$F : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, m > 1.$$

Ejemplo 2.2.1. (1) Campos escalares:

- (a) los campos que proporcionan la densidad,
- (b) los campos que proporcionan la temperatura,
- (c) los campos que proporcionan la altura.

(2) Campos vectoriales:

- (a) **Campos de fuerzas:** La fuerza de atracción gravitatoria entre dos objetos de masas M y m actúa a lo largo de la recta (imaginaria) que los une y está dada en módulo por

$$\|F\| = G \frac{mM}{r^2}.$$

donde r es la distancia entre los objetos, y $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ es la llamada constante de gravitación, de acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton.

Supongamos que el objeto de masa M está ubicado en el origen y el objeto de masa m está en el punto (x, y, z) . La distancia entre ellos es entonces $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y la recta de acción está determinada por el vector (unitario) $\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z)$. Podemos escribir el campo de fuerza gravitatoria que sufre la masa m debido a la masa M , en términos de sus funciones componentes como:

$$F(x, y, z) = -GMm \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

donde el signo $-$ indica que la fuerza es atractiva (hacia el origen, que es donde está M). Este campo de fuerzas se representa gráficamente mediante flechas en dirección radial apuntando hacia el origen de coordenadas, de longitud cada vez menor a medida que el objeto m se ubica m'as alejado del objeto M .

Otro ejemplo es la fuerza peso (fuerza de atracción gravitatoria que sufre una masa m muy cerca de la superficie terrestre), que da lugar a un campo vectorial constante:

$$F_p(x, y, z) = -mg\mathbf{k}$$

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales Q (ubicada en el origen) y q ubicada en el punto (x, y, z) puede ser atractiva (cuando ambas cargas tienen signos opuestos) o repulsiva (cuando tienen el mismo signo). Según la ley de Coulomb, la fuerza que sufre la carga q debido a la carga Q es el campo vectorial

$$F_e(x, y, z) = \varepsilon \frac{Qq}{r^2} \mathbf{r} = \varepsilon Qq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

donde ε es una constante.

- (b) **Campos de velocidades:** Cuando se pretende describir un fluido es conveniente indicar la velocidad con que pasa un elemento de fluido por un punto del espacio dado. En el caso de flujo estacionario (no depende del tiempo), se usa

un campo vectorial de velocidades $\mathbf{v}(x, y, z)$. Una línea de flujo de un campo de velocidades marca la trayectoria seguida por una partícula del fluido moviéndose en dicho campo, de forma que los vectores que representan el campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo. La representación por medio de líneas de flujo es usada, por ejemplo, para mostrar el movimiento de un fluido alrededor de un objeto (como el ala de un avión), las corrientes oceánicas también se representan mediante líneas de flujo, así como las térmicas que son columnas de aire ascendente que son utilizadas por las aves para planear, y también para vuelos en aladeltas, parapentes y planeadores sin motor.

- (c) **Campos de flujos:** La conducción térmica está determinada por la ley de Fourier, que establece que el flujo de transferencia de calor por conducción en un medio isótropo es proporcional y de sentido contrario al gradiente de temperatura en esa dirección. De forma vectorial:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

donde:

\mathbf{q} : es el vector de flujo de calor por unidad de superficie,

k : es una constante de proporcionalidad, llamada conductividad térmica, y

∇T : es el gradiente del campo de temperatura en el interior del material.

2.2.1. Integrales de línea de campos escalares

Definición 2.2.2. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ una curva paramétrica de clase C^1 inyectiva en $[a, b]$ y sea $\mathcal{C} = \text{Im}(\alpha)$ la curva descrita por α . La **integral de línea** de f a lo largo de \mathcal{C} se define por

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

Si la curva es cerrada representamos la integral sobre esta curva como $\oint_{\mathcal{C}} f ds$.

Observación 2.2.3. ■ Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable y $f(x, y, z)$ densidad de masa en $(x, y, z) \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} f ds$ es la masa total del cable.

- Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable y $f(x, y, z)$ temperatura en $(x, y, z) \Rightarrow$ La temperatura promedio del cable α es

$$\frac{1}{L(\mathcal{C})} \int_{\mathcal{C}} f ds.$$

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el campo escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definido en todo \mathbb{R}^3 y la hélice dada por $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen} t, t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar $\int_{\mathcal{C}} f ds$.

$$f(\gamma(t)) = \cos^2 t + \text{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

y

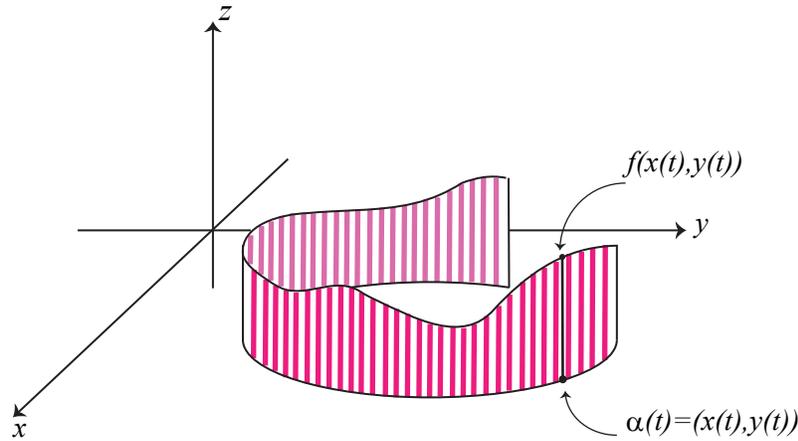
$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2) dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} 1+t^2 dt = \sqrt{2} \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi \left(1 + \frac{4}{3}\pi^2 \right).$$

Interpretación geométrica

Si $f(x, y) \geq 0$ sobre los puntos de la curva \mathcal{C} , entonces la integral se puede interpretar como el área lateral de la porción de superficie que tiene como base en $z = 0$ la curva \mathcal{C} y como altura $z = f(x, y)$ para los $(x, y) \in \mathcal{C}$, como se muestra en la figura.



Propiedades

1. **Linealidad:** Para cualesquiera escalares λ, μ ,

$$\int_{\mathcal{C}} (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_{\mathcal{C}} f ds + \mu \int_{\mathcal{C}} g ds.$$

2. **Aditividad:** Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ forman la curva \mathcal{C} , entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}_1} f ds + \int_{\mathcal{C}_2} f ds$$

Esto es, \mathcal{C} es la imagen de una función α definida en un intervalo $[a, b]$, y las curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son las representaciones de $\alpha(t)$ al variar t en los sub intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ respectiva, para un c que cumple $a < c < b$.

3. **Independencia de la parametrización:** Sean $(\alpha, [a, b])$ y $(\beta, [c, d])$ dos parametrizaciones equivalentes de la misma curva \mathcal{C} y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo, entonces

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_c^d f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| dt.$$

Ejemplo 2.2.3. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y, z) = \frac{4 + x^2 + y^2 + z^2}{3 - x^2 - y^2 - z^2}$$

donde U es la bola de centro $(0, 0, 0)$ y radio $\sqrt{3}$ y \mathcal{C} la curva parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sqrt{2} \operatorname{sent} t, \cos t)$, $t \in [0, \sqrt{2}]$. Entonces

$$f(\alpha(t)) = \frac{4 + 2}{3 - 2} = 6, \quad \|\alpha'(t)\| = \|(-\operatorname{sent} t, \sqrt{2} \cos t, -\operatorname{sent} t)\| = \sqrt{2}$$

y

$$\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_0^{\sqrt{2}} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{\sqrt{2}} 6\sqrt{2} dt = 12.$$

2.2.2. Integrales de línea de campos vectoriales

Un concepto muy utilizado en física es el de **trabajo de una fuerza** al mover un objeto de un punto a otro del espacio. Sabemos que, en el caso particular en que la fuerza \mathbf{F} es contante y el movimiento es en línea recta con un desplazamiento \mathbf{d} , el trabajo se calcula como el producto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$. En esta sección veremos como se define y calcula el trabajo en el caso general de un campo de fuerzas variable, cuando el objeto se mueve siguiendo una trayectoria arbitraria. Para ello, introduciremos la noción de integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva.

Ejemplo 2.2.4. La fuerza gravitacional de la Tierra sobre un objeto de masa m es un ejemplo de campo vectorial

$$F(x, y, z) = -\frac{mMG}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z).$$

Donde M es la masa de la Tierra y G la constante de gravitación universal.

Definición 2.2.4. Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ y \mathcal{C} una curva de clase C^1 en U (con parametrización $\alpha : [a, b] \rightarrow U$, inyectiva en $[a, b]$). Definimos la **integral de línea de X a lo largo de \mathcal{C}** como

$$\int_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Ejemplo 2.2.5. Consideremos el campo vectorial en \mathbb{R}^3 definido por $X(x, y, z) = (x, y, z)$ y la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sent} t, t)$ con $t \in [0, 4\pi]$. Entonces que $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\cos t, \operatorname{sent} t, t) \cdot (-\operatorname{sent} t, \cos t, 1) = t$. Por lo cual

$$\int_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_0^{4\pi} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{4\pi} = 8\pi^2.$$

Interpretación física: Si X es un campo de fuerzas y (x, y, z) representa una partícula que se desplaza a lo largo de la curva \mathcal{C} entonces

$$\int_{\mathcal{C}} X \cdot ds \quad \text{es el trabajo de la fuerza a lo largo de la curva.}$$

Notación clásica: Sea $X = (P, Q, R)$ un campo vectorial en el espacio continuo sobre una curva de clase C^1 , \mathcal{C} , parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in [a, b]$. Se tiene por definición:

$$\int_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

lo que explica que frecuentemente se use la notación:

$$\int_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Las expresiones $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ se denominan **1-formas diferenciales** o **formas diferenciales de grado 1**.

Ejemplo 2.2.6. Consideremos la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} x^2 dx + xydy + dz$ donde \mathcal{C} tiene la siguiente parametrización, $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$. Entonces $X(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$ y

$$\int_{\mathcal{C}} x^2 dx + xydy + dz = \int_0^1 t^2 + 2t^4 dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}2t^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

Proposición 2.2.5. Sean $(\alpha, [a, b])$ y $(\beta, [c, d])$ parametrizaciones equivalentes de \mathcal{C} que preservan orientación y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo, entonces

$$\int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_c^d X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt.$$

Demostración. Como α y β preservan orientación $\exists \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ biyectiva creciente de clase C^1 tal que $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$, entonces

$$X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) = X(\alpha(\varphi(t))) \cdot (\alpha(\varphi(t)))' = X(\alpha(\varphi(t))) \cdot \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Entonces

$$\int_c^d X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_c^d X(\alpha(\varphi(t))) \cdot \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = \varphi(t)$ ($du = \varphi'(t)dt$) tenemos que

$$\int_c^d X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_a^b X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du.$$

□

Cambio de orientación:

$$\int_{\mathcal{C}_{op}} X \cdot ds = - \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds,$$

donde \mathcal{C}_{op} es la misma curva pero recorrida en sentido contrario.

Consideremos $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de \mathcal{C} , y $\alpha_{op} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$\alpha_{op}(t) = \alpha(-t).$$

Observar que α_{op} es una reparametrización de \mathcal{C} que revierte la orientación, donde la función φ es $\varphi(t) = -t$. Entonces α_{op} es una parametrización de \mathcal{C}_{op} .

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{op}} X \cdot ds &= \int_{-b}^{-a} X(\alpha_{op}(t)) \cdot (\alpha'_{op}(t)) dt = - \int_{-b}^{-a} X(\alpha(-t)) \cdot \alpha'(-t) dt \\ &= \int_b^a X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = - \int_a^b X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = - \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = -t$.

Propiedades

Sea \mathcal{C} la curva en \mathbb{R}^3 y α definida sobre $[a, b]$ una parametrización de clase C^1 . Consideremos X, Y campos vectoriales definidos y acotados sobre \mathcal{C} . Entonces:

- (i) **(Linealidad respecto del integrando)** Para cualquier par de escalares λ, μ ,

$$\int_{\mathcal{C}} (\lambda X + \mu Y) \cdot ds = \lambda \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds + \mu \int_{\mathcal{C}} Y \cdot ds.$$

- (ii) **(Aditividad respecto al camino de integración)** Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son tales que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ (si $\alpha(t)$ parametrización de \mathcal{C} entonces al variar t en $[a, c]$ tenemos una parametrización de \mathcal{C}_1 y al variar t en $[c, b]$ tenemos una parametrización de \mathcal{C}_2 , con $a < c < b$), entonces

$$\int_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_1} X \cdot ds + \int_{\mathcal{C}_2} X \cdot ds$$

- (iii) **(Continuidad)** $\left| \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds \right| \leq ML(\mathcal{C})$. Donde $M = \sup\{\|X(p)\| : p \in \mathcal{C}\}$ y $L(\mathcal{C})$ es la longitud de arco de la curva \mathcal{C} .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds \right| &= \left| \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \right| \leq \int_a^b |X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|X(\alpha(t))\| \|\alpha'(t)\| dt \leq \int_a^b M \|\alpha'(t)\| dt = ML(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.7. Consideremos el campo vectorial $X(x, y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y \geq 0$. Calcular la integral de línea de X desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$ a lo largo de las siguientes curvas:

(a) La recta $x(t) = t$, $y(t) = t$ con $0 \leq t \leq 1$.

Parametrización $\alpha(t) = (t, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (1, 1)$ y $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\sqrt{t}, t^3 + t) \cdot (1, 1) = \sqrt{t} + t^3 + t$. Entonces

$$\int_c X \cdot ds = \int_0^1 \sqrt{t} + t^3 + t dt = \left. \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \right|_0^1 = \frac{17}{12}.$$

(b) El camino $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

Parametrización $\alpha(t) = (t^2, t^3) \Rightarrow \alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ y $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (t^{3/2}, t^6 + t^3) \cdot (2t, 3t^2) = 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5$. Entonces

$$\int_c X \cdot ds = \int_0^1 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5 dt = \frac{59}{42}.$$

2.3. Campos de gradientes

Continuaremos estudiando las integrales de línea, concentrándonos en la siguiente pregunta: ¿bajo qué circunstancias la integral de línea de un campo vectorial no depende tanto del camino a lo largo del que se integra, sino sólo de los puntos inicial y final de su trayectoria?

Comenzaremos con un resultado que generaliza el teorema fundamental del cálculo y que también es muy útil para calcular las integrales de línea de campos vectoriales que son gradientes de campos escalares; en este caso la integral del campo vectorial gradiente dependerá solamente del valor del campo escalar correspondiente en los extremos del camino.

Definición 2.3.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. El **gradiente** de f en $p \in U$ es el vector

$$\nabla_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right).$$

$\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $(\nabla f)(p) = \nabla_p f$ es un campo vectorial.

Ejemplo 2.3.1. 1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(y) e^{5z}$. Entonces

$$\nabla(f) = (\operatorname{sen}(y)e^{5z}, x \cos(y)e^{5z}, x \operatorname{sen}(y) 5e^{5z}).$$

Definición 2.3.2. Un campo vectorial $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo es un **campo de gradientes** si existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $X = \nabla f$ en U . Se dice que f es un **potencial escalar** de X .

En muchos resultados los conjuntos con los cuales se trabaja tienen propiedades adicionales, una de estas propiedades es la que caracteriza a los conjuntos conexos. Intuitivamente, un conjunto conexo es aquel formado por una sola “pieza”, que no se puede “dividir”.

Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se llama **conexo** si no se puede escribir como unión disjunta de dos conjuntos abiertos no vacíos. Equivalentemente, U es conexo si dados dos puntos cualesquiera del mismo existe una curva que los conecta contenida en el subconjunto.

Observación 2.3.3. Si U es conexo entonces dos potenciales de un campo de gradientes difieren en una constante:

$X = \nabla f$ y $X = \nabla g$ en U entonces $\nabla(f - g) = 0$ en U , entonces $f - g = cte$ y por lo tanto $f = g + cte$.

Ejemplo 2.3.2 (Campo eléctrico de una carga puntual). El campo eléctrico generado por una carga puntual en el origen está dado por

$$E(x, y, z) = k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

De forma sencilla se deduce que la función

$$f(x, y, z) = -k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

verifica que $\nabla f = E$ de donde resulta que E es de gradientes.

El **potencial eléctrico** es la función V que verifica $E = \nabla V$ y $V(\infty) = 0$, con lo cual

$$V(x, y, z) = -k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

2.3.1. Integral de línea de un campo de gradientes

El siguiente resultado puede entenderse como una versión de la Regla de Barrow para integrales de línea, o como una versión “vectorial” de dicha regla.

Teorema 2.3.4 (Regla de Barrow para integrales de línea). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial escalar de un campo X de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ y \mathcal{C} una curva contenida en U de origen A y extremo B . Entonces:*

$$\int_{\mathcal{C}} X \cdot ds = f(B) - f(A).$$

En particular, si el camino \mathcal{C} es cerrado, se tendrá:

$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = 0.$$

Demostración. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ una parametrización de \mathcal{C} . La integral de línea de X entre a y b a lo largo de α viene dada por

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds &= \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (f(\alpha(t)))' dt \\ &= f(\alpha(t)) \Big|_a^b = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

En particular, si \mathcal{C} es cerrada concluimos que

$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = f(B) - f(A) = 0.$$

□

Teorema 2.3.5. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo continuo en U . Son equivalentes

1. Existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f = X$. (X es de **gradientes** y f es el **potencial escalar** de X).
2. $\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = 0$ para toda curva cerrada simple C^1 en U .
3. $\int_{\mathcal{C}_1} X \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_2} X \cdot ds$ para todo par de curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 con el mismo origen y el mismo extremo. (X es **conservativo**).

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ una parametrización de \mathcal{C} . Como X es de gradientes tenemos que

$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = 0.$$

(2) \Rightarrow (3) Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos curvas con el mismo origen y el mismo extremo. Entonces consideremos la curva cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$, y por la afirmación (2) tenemos que

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_1} X \cdot ds - \int_{\mathcal{C}_2} X \cdot ds \Rightarrow \int_{\mathcal{C}_1} X \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_2} X \cdot ds.$$

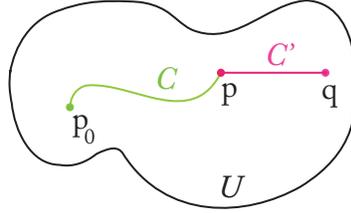
(3) \Rightarrow (1) Sea $p_0 \in D$ fijo, donde D es una componente conexa de U . Definimos el campo escalar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x, y, z) = \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds,$$

donde \mathcal{C} es una curva cualquiera simple con origen p_0 y extremo $p = (x, y, z)$ contenida en D . (Dicha curva existe porque D es abierto y conexo).

Tenemos que probar que $\nabla f = X$ de lo cual deducimos en particular que f es C^1 en D .

Sea $q = (x + h, y, z)$, con h suficientemente pequeño para garantizar que el segmento $pq \in D$.



Tomemos la curva C' con parametrización $\alpha(t) = (x + th, y, z)$, si $X = (P, Q, R)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x + h, y, z) - f(x, y, z) &= \int_{C \cup C'} X \cdot ds - \int_C X \cdot ds = \int_{C'} X \cdot ds = \int_0^1 X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= h \int_0^1 P(x + th, y, z) dt = hP(x + \theta h, y, z), \quad \text{para algún } \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

El valor θ existe por el teorema de valor medio para integrales.

Entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$. De donde se deduce que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ en D .

De forma análoga se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = R$ en D .

Trabajando de modo análogo en cada componente conexa de U se obtiene el resultado. \square

Observación 2.3.6. Si $\oint_C X \cdot ds \neq 0$ para alguna curva cerrada, entonces X no es de gradientes.

Por otra parte, no es suficiente que $\oint_C X \cdot ds = 0$ para infinitas curvas para concluir que el campo es de gradientes como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.3. Sea $X(x, y) = (x, xy)$ y C_r la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r parametrizada por $\alpha_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} X \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (r \cos t, r^2 \sin t \cos t)(-r \sin t, r \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-r^2 \cos t \sin t + r^3 \sin t \cos^2 t) dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt + r^3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt = -\frac{r^2}{2} \cos^2 t \Big|_0^{2\pi} - \frac{r^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo $\frac{\partial xy}{\partial x} = y \neq 0 = \frac{\partial x}{\partial y}$, que es una condición necesaria para que sea de gradientes (como veremos en el siguiente teorema).

Teorema 2.3.7. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $X = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C^1 en U . Si X es de gradientes en U entonces

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Demostración. Como $X = (P, Q, R)$, campo vectorial de clase C^1 , es de gradientes existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f = X$. Entonces

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

De lo cual se deduce que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Para garantizar que las derivadas segundas cruzadas de f coinciden estamos usando que f es de clase C^2 y el teorema de Schwartz. De igual forma se deducen las otras dos igualdades. \square

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones del teorema previo no siempre son suficientes para que un campo vectorial sea de gradientes.

Ejemplo 2.3.4. Sea $S = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ y $X : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por

$$X(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Veamos que las derivadas cruzadas coinciden pero sin embargo X no es de gradientes.

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in S$.

Para ver que X no es de gradientes en S calculemos la integral de línea de X a lo largo de la circunferencia unidad dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_0^{2\pi} X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Entonces X no es de gradientes.

2.4. Rotor y campos irrotacionales

2.4.1. Rotor

El rotacional o rotor es un operador vectorial sobre campos vectoriales definidos en un abierto de \mathbb{R}^3 que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

Definición 2.4.1. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Definimos el **rotor** de X como el campo vectorial $\text{rot } X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\text{rot } X = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

si $X = (P, Q, R)$.

Para recordar la fórmula usaremos la notación de “operador”. Símbolo nabla: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Utilizando este operador podemos considerar el siguiente producto vectorial que coincide con el rotor de X

$$\nabla \wedge X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Entonces $\text{rot } X = \nabla \wedge X$.

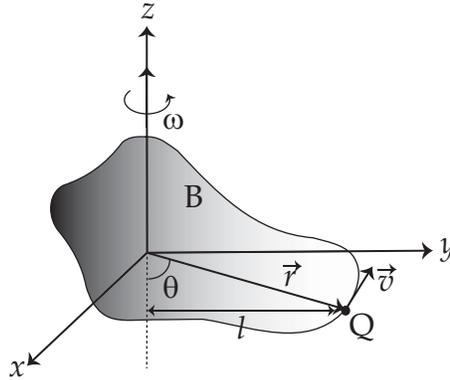
Ejemplo 2.4.1. Sea $X(x, y, z) = (xz, y, z)$ definido en todo el espacio. Entonces

$$\text{rot } X = (0, x, 0).$$

Observación 2.4.2. Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, lo podemos pensar como un campo en \mathbb{R}^3 con tercer componente nula, es decir, $X = (P, Q, 0)$. Ahora le podemos calcular su rotor

$$\text{rot } X = (0, 0, Q_x - P_y).$$

Observación 2.4.3 (Interpretación física del rotor).



Consideremos un rígido B que gira alrededor del eje z . La rotación se puede describir mediante un vector $\vec{\omega}$ a lo largo del eje de rotación, la dirección se escoge de manera que el cuerpo gire alrededor de $\vec{\omega}$ como en la figura, con longitud $\omega = \|\vec{\omega}\|$, velocidad angular del cuerpo B , esto es, la velocidad tangencial de cualquier punto en B dividida entre su distancia al eje z de rotación. Sea Q cualquier punto en B y sea l la distancia de Q a z

$$l = \|\vec{r}\| \sin \theta,$$

donde \vec{r} es el vector cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es Q . La velocidad tangencial \vec{v} de Q se dirige en sentido antihorario, a lo largo de la tangente a un círculo paralelo al plano xy con radio l , con magnitud

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\| \sin \theta &= \omega l = \omega \|\vec{r}\| \sin \theta = \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\| \sin \theta \\ \Rightarrow \vec{v} &= \vec{\omega} \wedge \vec{r}.\end{aligned}$$

Debido a la selección de ejes, podemos escribir $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, de modo que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

y más aún

$$\text{rot } \vec{v} = 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Por lo tanto, para la rotación de un cuerpo rígido, el rotacional del campo vectorial de velocidad es un campo vectorial dirigido paralelo al eje de rotación con magnitud igual al doble de la velocidad angular.

Si un campo vectorial X representa el flujo de un fluido, entonces $\text{rot } X = O$ en P significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones o es irrotacional en P ; esto es, no tiene remolinos.

2.4.2. Campos irrotacionales

Definición 2.4.4. Un campo vectorial X es **irrotacional** si $\text{rot } X = O$.

Ejemplo 2.4.2. Los siguientes campos son irrotacionales.

1. $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (x, y, z)$.
2. $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (y, x, 0)$.
3. $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (x, z, y)$.

Propiedades

1. $\text{rot}(aX + bY) = a \text{rot } X + b \text{rot } Y$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\text{rot}(fX) = f \text{rot } X + \nabla f \wedge X$, f campo escalar.
3. $\text{rot}(\nabla f) = 0$ si f es de clase C^2 .

Demostración. 1. $\text{rot}(aX + bY) = \nabla \wedge (aX + bY) = a \nabla \wedge X + b \nabla \wedge Y = a \text{rot } X + b \text{rot } Y$.

$$\begin{aligned}2. \text{rot}(fX) &= \nabla \wedge (fX) = \left(\frac{\partial fR}{\partial y} - \frac{\partial fQ}{\partial z}, \frac{\partial fP}{\partial z} - \frac{\partial fR}{\partial x}, \frac{\partial fQ}{\partial x} - \frac{\partial fP}{\partial y} \right) \\ &= \left(f_y R + f \frac{\partial R}{\partial y} - f_y P - f \frac{\partial Q}{\partial z}, f_z P + f \frac{\partial P}{\partial z} - f_x R - f \frac{\partial R}{\partial x}, f_x Q + f \frac{\partial Q}{\partial x} - f_y P - f \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= (f_y R - f_z Q, f_z P - f_x R, f_x Q - f_y P) + f \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \nabla f \wedge X + f \text{rot } X.\end{aligned}$$

3. $\text{rot}(\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = (0, 0, 0)$ porque f es de clase C^2 .

□

Corolario 2.4.5. Si X es un campo C^1 de gradientes entonces es irrotacional.

El recíproco en general no se cumple, basta considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.3. Sea $X(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$, y $\text{rot} X = (0, 0, Q_x - P_y) = 0$ porque $Q_x = P_y$. Entonces X es irrotacional. Sin embargo este campo no es de gradientes, basta considerar \mathcal{C} la circunferencia de centro el origen y radio 1 en el plano xy y calcular la circulación de X a lo largo de \mathcal{C} .

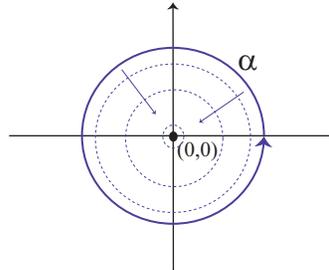
$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \int_0^{2\pi} X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Entonces X no es conservativo y por lo tanto no es de gradientes.

Definición 2.4.6. Una curva \mathcal{C} cerrada (parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow U$) contenida en U es **homotópica a un punto** P en U si existe $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ continua tal que $H(s, a) = H(s, b)$ para todo $s \in [0, 1]$, $H(0, t) = \alpha(t) : [a, b] \rightarrow U$ y $H(1, t) = P$ para todo $t \in [a, b]$.

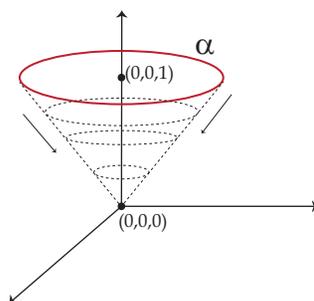
Intuitivamente, esto quiere decir que \mathcal{C} puede deformarse en U de forma continua a un punto P .

Ejemplo 2.4.4. 1. Si consideramos $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, veamos que es homotópica a $(0, 0)$. Definimos $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $H(s, t) = ((1-s)\cos t, (1-s)\sin t)$, fijando s tenemos que $H(s, 0) = ((1-s), 0) = H(s, 2\pi)$, además $H(0, t) = (\cos t, \sin t) = \alpha(t)$ y $H(1, t) = (0, 0)$. Entonces H es una homotopía entre la cfa. unidad y el origen del plano.



2. Consideremos $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 1)$ y sea $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ curva que rodea a la singularidad. definimos $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 - (0, 0, 1)$ por $H(s, t) = ((1-s)\cos t, (1-s)\sin t, 1-s)$, es una función continua y verifica que $H(s, 0) = (1-s, 0, 1-s) =$

$H(s, 2\pi)$, $H(0, t) = \alpha(t)$ y $H(1, t) = (0, 0, 0)$. entonces H es una homotopía entre la circunferencia y el origen del espacio.



Definición 2.4.7. Un conjunto U es **simplemente conexo** si es abierto, conexo y toda curva cerrada contenida U es homotópica a un punto en U .

Ejemplo 2.4.5. 1. \mathbb{R}^2 es simplemente conexo. Basta generalizar la construcción que vimos en el ejemplo anterior, para probar que toda curva cerrada del plano se puede contraer a un punto.

2. $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ no es simplemente conexo. Si tomamos una curva cerrada que encierre al punto P no vamos a poder construir una homotopía que la lleve a un punto ya que la singularidad nos obstruye el proceso.
3. $\mathbb{R}^3 - \{P\}$ es simplemente conexo. Al tener una dimensión mas podemos evitar la singularidad y contraer cualquier curva cerrada a un punto, repitiendo el razonamiento visto en el ejemplo anterior.
4. $\mathbb{R}^3 - \{P_1, \dots, P_k\}$ es simplemente conexo. Vale igual argumento que el caso anterior.

El siguiente teorema lo veremos para los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Teorema 2.4.8. Si $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo C^1 irrotacional y U es simplemente conexo, entonces X es un campo de gradientes.

La demostración la veremos más adelante.

Corolario 2.4.9. Si $X : \mathbb{R}^3 - \{P_1, \dots, P_k\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo C^1 irrotacional, entonces X es un campo de gradientes (conservativo).

Ejemplo 2.4.6. Consideremos el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (y, z \cos(yz) + x, y \cos(yz))$.

1. Veamos que F es de gradientes. Basta probar que es irrotacional ya que \mathbb{R}^3 es simplemente conexo.

$$\text{rot } F = (\cos(yz) - zy \sin(yz) - \cos(yz) + yz \sin(yz), 0, 1 - 1) = (0, 0, 0).$$

2. Hallemos un potencial escalar f , es decir $\nabla f = F$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f(x, y, z) = xy + h(y, z),$$

por otro lado

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \cos(yz) + x \Rightarrow x + \frac{\partial h}{\partial y} = z \cos(yz) + x \Rightarrow h(y, z) = \sin(yz) + l(z)$$

finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \cos(yz) \Rightarrow y \cos(yz) + l'(z) = y \cos(yz).$$

Por lo tanto, podemos tomar $f(x, y, z) = xy + \sin(yz)$.

2.5. Divergencia y campos solenoidales

2.5.1. Divergencia

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente en una superficie que encierra un fluido.

Si el volumen elegido solamente contiene fuentes o sumideros su divergencia es siempre distinta de cero.

La divergencia de un campo vectorial en un punto es un campo escalar, que se puede definir como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero.

Definición 2.5.1. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Definimos la **divergencia** de X como el campo escalar $\operatorname{div} X : U \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

siendo $X = (P, Q, R)$.

Notación: $\operatorname{div} X = \nabla \cdot X$.

Propiedades

1. $\operatorname{div}(aX + bY) = a \operatorname{div} X + b \operatorname{div} Y$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \nabla f \cdot X$, f campo escalar de clase C^1 .
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$ si X es de clase C^2 .

Demostración. 1. $\operatorname{div}(aX + bY) = \nabla \cdot (aX + bY) = a \nabla \cdot X + b \nabla \cdot Y = a \operatorname{div} X + b \operatorname{div} Y$.

$$2. \operatorname{div}(fX) = \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) = f_x P + f \frac{\partial P}{\partial x} + f_y Q + f \frac{\partial Q}{\partial y} + f_z R + f \frac{\partial R}{\partial z} = (f_x P + f_y Q + f_z R) + f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \nabla f \cdot X + f \operatorname{div} X.$$

$$3. \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = \nabla \cdot \nabla \wedge X = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0, \text{ porque } X \text{ es de clase } C^2.$$

□

Ejemplo 2.5.1. Sea el campo vectorial $X(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z)$, hallar su divergencia.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= e^x \sin y - e^x \sin y + 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Interpretación física de la divergencia: Si X representa el campo de velocidades de un fluido en movimiento entonces la divergencia de X en un punto P de coordenadas (x, y, z) dice que:

1. El fluido tiende a alejarse del punto P si: $\operatorname{div} X(x, y, z) > 0$.
2. El fluido tiende a acumularse alrededor del punto P si: $\operatorname{div} X(x, y, z) < 0$.

2.5.2. Campos solenoidales

Definición 2.5.2. Un campo vectorial $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 es **solenoidal** si $\operatorname{div} X = 0$.

Ejemplo 2.5.2. Probar que cualquier campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$$

es solenoidal.

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(f(y, z)) + \frac{\partial}{\partial y}(g(x, z)) + \frac{\partial}{\partial z}(h(x, y)) = 0.$$

Al estudiar el gradiente de un campo escalar vimos criterios que permiten determinar si un campo vectorial es o no un gradientes. Consideramos ahora la pregunta análoga relativa al rotor de un campo vectorial. Dado un campo vectorial Y , ¿hay un campo X tal que $\operatorname{rot} X = Y$?

Supongamos que $Y = (P, Q, R)$ y $X = (L, M, N)$. Para resolver la ecuación $\operatorname{rot} X = Y$ tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = R \quad (2.2)$$

en las que P , Q y R son conocidas y L , M , N son las funciones incógnitas.

No siempre es posible resolver tal sistema. Por ejemplo, demostramos anteriormente que la divergencia de un rotor es siempre cero. Por tanto, para que el sistema (2.2) tenga solución en un cierto conjunto abierto S es necesario que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

en todo S . Esta condición es también suficiente si restringimos convenientemente el conjunto S en el que se verifica (2.3).

Definición 2.5.3. Sea $Y : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, decimos que $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un **potencial vectorial** de Y si:

$$\text{rot } X = Y.$$

Teorema 2.5.4. Si $Y : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1 , entonces existe un campo vectorial X tal que $\text{rot } X = Y$ si y sólo si Y es solenoidal (es decir si $\text{div } Y = 0$ en todo \mathbb{R}^3).

Demostración. La necesidad de la condición $\text{div } Y = 0$ ha sido ya establecida, puesto que la divergencia de un rotor siempre es cero. Para probar la suficiencia tenemos que encontrar tres funciones L , M y N que satisfagan las tres ecuaciones (2.2). Intentemos resolver el problema tomando $L = 0$. Entonces la segunda y tercera ecuaciones 2.2 se transforman en

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -Q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = R.$$

Entonces

$$N(x, y, z) = - \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt + f(y, z)$$

y

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt + g(y, z)$$

donde cada integración se efectúa a lo largo de un segmento rectilíneo y las “constantes de integración” $f(y, z)$ y $g(y, z)$ son independientes de x .

Para hallar una solución supongamos $f(y, z) = 0$. La primera ecuación de (2.2) exige

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P \quad (2.4)$$

Según la elección de M y N tenemos

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt - \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z}. \quad (2.5)$$

Intercambiando los operaciones de derivación parcial e integración tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} Q(t, y, z) dt$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial z} R(t, y, z) dt$$

Con ello la ecuación se convierte en

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x \left[-\frac{\partial}{\partial y} Q(t, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} R(t, y, z) \right] dt - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Como la divergencia es cero, tenemos que

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} P(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P(x, y, z) - P(x_0, y, z) - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Por consiguiente, 2.4 se verifica si elegimos g de modo que $\frac{\partial g}{\partial z} = -P(x_0, y, z)$. Así, por ejemplo, podemos tomar

$$g(y, z) = - \int_{z_0}^z P(x_0, y, u) du.$$

Este razonamiento nos lleva a considerar el campo vectorial $X = (L, M, N)$, donde $L(x, y, z) = 0$ y

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \int_{z_0}^z P(x_0, y, u) du, \quad N(x, y, z) = - \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt$$

□

2.6. Superficies paramétricas

La primera idea intuitiva de la noción de superficie es la de ser una deformación de una determinada región del plano. Diremos entonces que una superficie es la imagen en el espacio \mathbb{R}^3 de una aplicación continua definida en una región del plano. Las coordenadas de los puntos de la superficie vienen dadas por las componentes de dicha aplicación, cada una de las cuales es una función de dos parámetros.

Definición 2.6.1. Una **superficie parametrizada** en \mathbb{R}^3 es la imagen de una función continua Φ definida en una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que toma valores en \mathbb{R}^3 , esto es,

$$\Phi : (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Las variables independientes de la función Φ se llaman **parámetros de la superficie** y la propia función Φ recibe el nombre de **parametrización de la superficie**. La imagen por Φ de la frontera de la región D se llama **borde o contorno** de la superficie. Si Φ es inyectiva, lo que significa que no hay puntos dobles, entonces se dice que la superficie es **simple**. A la imagen de Φ la notaremos por S .

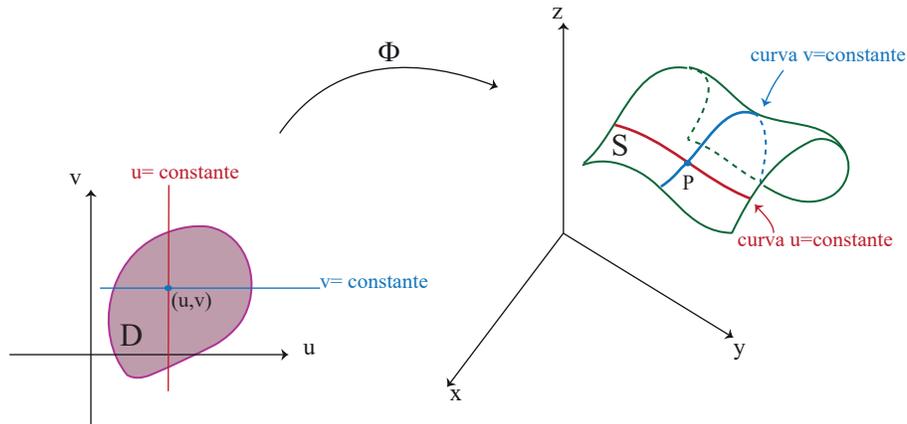


Figura 2.4: Superficie parametrizada

Gráficas de funciones

Son superficies definidas por una ecuación explícita de la forma $z = f(x, y)$, donde f es una función que toma valores reales continua definida en una región plana $D \subset \mathbb{R}^2$. En ese caso, los parámetros de la superficie son x e y y la parametrización viene dada por $\Phi : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.6.1. Entre las superficies que son gráficas de funciones podemos mencionar los planos de la forma $ax + by + cz = d$, siempre que $c \neq 0$. Basta considerar $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{c}(d - ax - by) \right),$$

claramente es continua y justamente $\text{Im } \Phi$ es el plano deseado.

Ejemplo 2.6.2. El paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$ es otra superficie definida por el gráfico de una función. Consideremos $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2).$$

Es claro que esta función es continua y su imagen es la superficie deseada.

Superficie de revolución

Consideremos una curva \mathcal{C} contenida en el plano $x = 0$. Si hacemos girar esta curva alrededor del eje Oz obtenemos una superficie conocida como **superficie de revolución**.

Vamos a obtener una parametrización de dicha superficie. Para ello partimos de una parametrización de la curva \mathcal{C} dada por la función $\alpha(t) = (0, y(t), z(t))$ con $t \in I$. Fijado un punto $\alpha(t)$ de dicha curva, si lo giramos alrededor del eje Oz un ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$, obtenemos un punto $\Phi(t, \theta) := (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$.

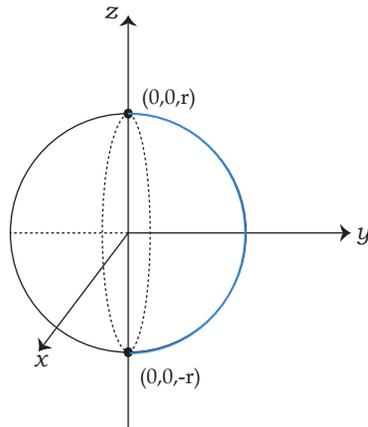
De esta forma obtenemos la parametrización de la superficie de revolución S dada por

$$\Phi : (t, \theta) \in I \times [0, 2\pi] \rightarrow \Phi(t, \theta) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

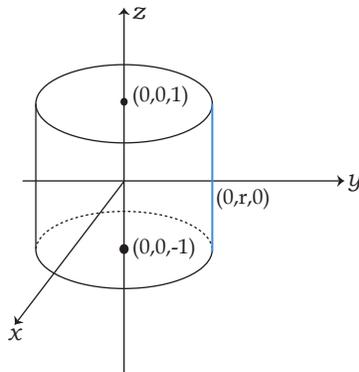
Ejemplo 2.6.3 (Esfera). Si consideramos la semicircunferencia en el plano $x = 0$, centrada en el origen y de radio $r > 0$, parametrizada mediante la función $\alpha(u) = (0, r \cos u, r \sin u)$, donde $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y la hacemos girar alrededor del eje Oz obtenemos la siguiente parametrización de la esfera

$$\Phi : (u, \theta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(u, \theta) = (r \cos u \cos \theta, r \cos u \sin \theta, r \sin u) \in \mathbb{R}^3$$

Es interesante observar que con esta parametrización se obtienen dos puntos que no son simples. Concretamente el polo sur y el polo norte de la esfera son puntos múltiples. Esta situación se presenta siempre que tengamos una superficie de revolución obtenida a partir de una curva en el plano $x = 0$ que corte al eje Oz .

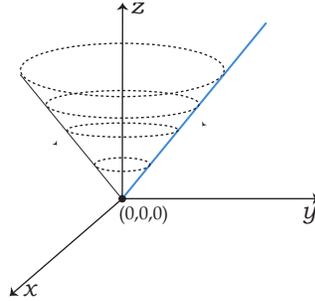


Ejemplo 2.6.4 (Cilindro). Consideremos el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, con $-1 \leq z \leq 1$. En este caso hacemos girar el segmento contenido en el plano $x = 0$, con $y = r$ y $z \in [-1, 1]$. Obtenemos la parametrización $\Phi : (z, \theta) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(z, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3$.



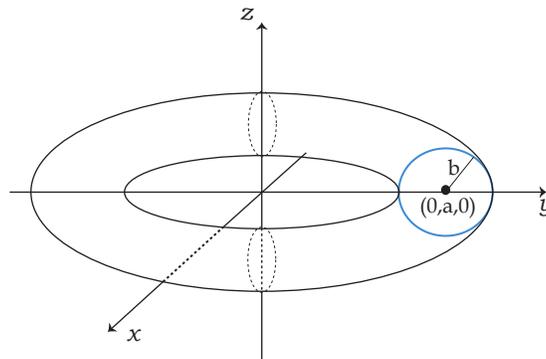
Ejemplo 2.6.5 (Cono). Consideremos el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. En este caso hacemos girar la recta de ecuación $\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$ parametrizada por $\alpha(t) = (0, t, t)$. Obteniendo la parametrización

$$\Phi : (t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t) \in \mathbb{R}^3$$



Ejemplo 2.6.6 (Toro). El toro de revolución es la superficie que se obtiene al girar una determinada circunferencia, contenida en un plano que contiene al eje Oz , alrededor del eje Oz . Concretamente, si fijamos dos números $0 < b < a$ y consideremos la circunferencia en el plano $x = 0$ centrada en el punto $(0, a, 0)$ y de radio b , entonces llamaremos toro a la superficie que se obtiene al girar dicha circunferencia alrededor del eje Oz . Teniendo en cuenta que una parametrización de la circunferencia es $\alpha(u) = (0, a + b \cos u, b \sin u)$, cuando el parámetro $u \in [0, 2\pi]$, obtenemos que una parametrización del toro es

$$\Phi : (u, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(u, \theta) = ((a + b \cos u) \cos \theta, (a + b \cos u) \sin \theta, b \sin u) \in \mathbb{R}^3$$



Observación 2.6.2. De forma análoga a como se ha realizado aquí se pueden obtener superficies de revolución con otros ejes de giro. En concreto, consideremos una curva \mathcal{C} contenida en un plano que contiene al eje sobre el que se gira. Si hacemos girar \mathcal{C} sobre este eje, se obtiene una superficie de revolución.

2.6.1. Plano Tangente

Si sólo nos conformamos con exigir que la parametrización Φ sea continua, entonces la superficie S puede degenerar en un punto o en una curva. Evitaremos estos casos exigiendo

que la parametrización Φ cumpla ciertas condiciones que, esencialmente, significan que, en cada uno de sus puntos, la superficie admite un plano tangente.

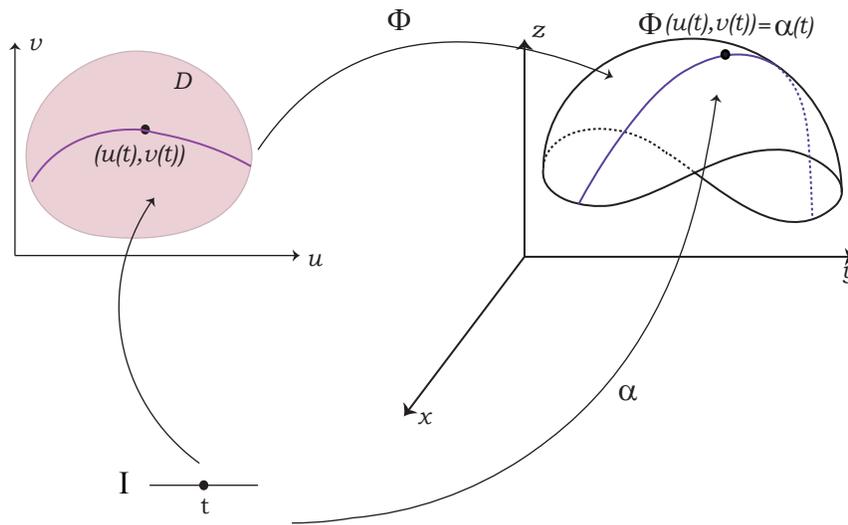
Consideremos una superficie S que está parametrizada por una función

$$\Phi : (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3.$$

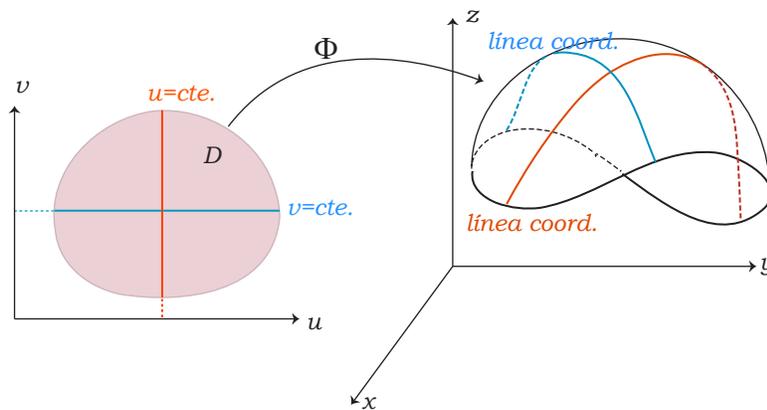
Sea $(u(t), v(t))$, con t en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, una curva regular contenida en D . Entonces

$$\alpha : t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \alpha(t) := \Phi(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \in \mathbb{R}^3$$

es una curva contenida en S que se llama **curva parametrizada sobre la superficie**.



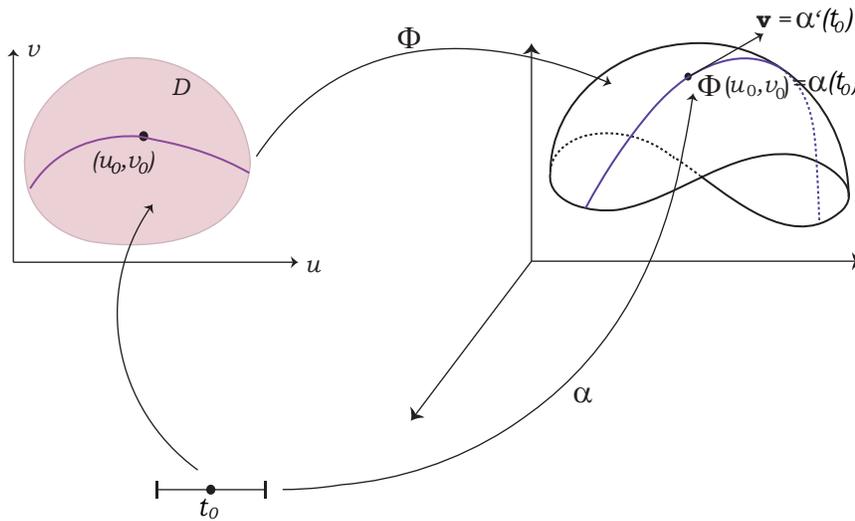
En particular, se pueden considerar sobre S las curvas que se obtienen al hacer u constante y $v = t$, o bien v constante y $u = t$. Estas curvas se llaman **líneas coordenadas sobre la superficie**. La red de líneas coordenadas sobre la superficie corresponde a la red de líneas rectas paralelas a los ejes en el plano de los parámetros.



Consideremos un punto $A = (u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$ de la curva en la región D y sea $P = \alpha(t_0)$. Si la función Φ es diferenciable, entonces, por la regla de la cadena, tenemos

$$\alpha'(t_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)u'(t_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)v'(t_0) = u'(t_0)\Phi_u(A) + v'(t_0)\Phi_v(A). \quad (2.6)$$

Definición 2.6.3. Sea $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de una superficie S diferenciable en $A = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Decimos que \mathbf{v} es un **vector tangente** a la superficie en el punto $P = \Phi(u_0, v_0)$ si es vector tangente en dicho punto a una curva sobre la superficie. Es decir, existe una curva \mathcal{C} contenida en la superficie parametrizada por $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ tal que $\alpha(t_0) = P$ y $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$.



Entonces la igualdad (2.6) prueba que el conjunto de todos los vectores tangentes a una superficie en P está generado por los siguientes dos vectores

$$\{\Phi_u(A), \Phi_v(A)\}$$

siempre que estos sean linealmente independientes. Estos vectores $\Phi_u(A)$ y $\Phi_v(A)$ son tangentes a las líneas coordenadas $\Phi(t, v_0)$ y $\Phi(u_0, t)$.

Proposición 2.6.4. Todos los vectores tangentes a S por $\Phi(u_0, v_0)$ son combinación lineal de $\Phi_u(A)$ y $\Phi_v(A)$.

Observación 2.6.5. La idea intuitiva que tenemos de lo que es una superficie exige que en cada punto de la misma exista un plano de vectores tangentes. En consecuencia, tenemos que imponer que, en cada punto, los vectores $\Phi_u(A)$ y $\Phi_v(A)$ sean linealmente independientes, lo que ocurre si, y sólo si, su producto vectorial $\Phi_u(A) \wedge \Phi_v(A)$ es distinto de cero, o equivalentemente $\|\Phi_u(A) \wedge \Phi_v(A)\| \neq 0$. En este caso, este producto vectorial es un vector perpendicular a toda curva regular contenida en la superficie que pasa por el punto correspondiente. Decimos en este caso que el punto $P = \Phi(A)$ es un **punto regular** de la superficie.

Proposición 2.6.6. Sean $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de S , $A = (u_0, v_0) \in D$ y $P = \Phi(A)$ punto regular de la superficie. Entonces, el espacio de vectores tangentes a la superficie es un plano. Más aún, es el plano que pasa por el punto P generado por los vectores $\Phi_u(A)$ y $\Phi_v(A)$.

A este plano lo notamos como $T_P S$ y se llama **plano tangente a la superficie S por el punto P** .

Demostración. Por lo que vimos en la proposición anterior todo vector tangente por el punto $P = \Phi(u_0, v_0)$ es CL de $\Phi_u(A)$ y $\Phi_v(A)$. Además, como P es un punto regular tenemos que $\{\Phi_u(A), \Phi_v(A)\}$ es LI, por lo tanto, el espacio que generan es un plano. Todavía más, es el plano por $P = \Phi(A)$ generado por los vectores $\Phi_u(A)$ y $\Phi_v(A)$. \square

Por lo probado anteriormente:

$$T_P S : (X - P) \cdot (\Phi_u(A) \wedge \Phi_v(A)) = 0.$$

Donde $X = (x, y, z)$, $P = \Phi(A)$ y $A = (u_0, v_0)$.

Ejemplo 2.6.7. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación implícita $z = x^2 - y^2$ en el punto $P = (-1, 1, 0)$.

Consideremos la parametrización de la superficie dada por $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, por lo tanto $\Phi_u(u, v) = (1, 0, 2u)$ y $\Phi_v(u, v) = (0, 1, -2v)$, entonces

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = (-2u, 2v, 1).$$

Si consideramos ahora el punto $P = (-1, 1, 0) = \Phi(-1, 1)$ tenemos que

$$\Phi_u(A) \wedge \Phi_v(A) = (2, 2, 1).$$

Entonces

$$T_P S : ((x, y, z) - (-1, 1, 0)) \cdot (2, 2, 1) = 0,$$

simplificando, concluimos que $T_P S : 2x + 2y + z = 0$.

Ejemplo 2.6.8 (Semiesfera). Consideremos la semiesfera superior de radio r y con centro en el origen: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z > 0$ y tomemos la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v) \end{aligned}$$

$\Phi_u(u, v) = (-r \sin u \sin v, r \cos u \sin v, 0)$ y $\Phi_v(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r \sin v)$.

Entonces

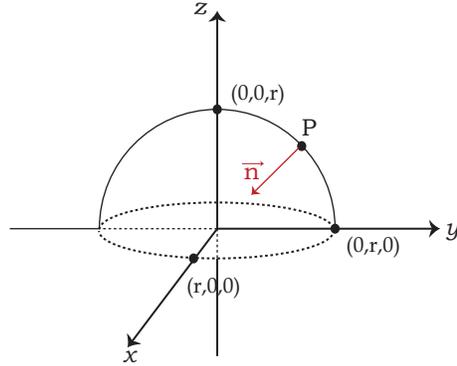
$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = -r^2 \sin v (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = \vec{0} \Leftrightarrow v = 0$.

Calculemos el versor normal a la esfera en un punto interior arbitrario:
 $\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| = r^2 \sin v$. Entonces

$$\vec{n} = \frac{\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)}{\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|} = -(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

Es un vector radial que apunta al centro de la esfera.



Calculemos el plano tangente a la superficie en el punto $P = (1, 1, \sqrt{2})$, para $u = v = \pi/4$ y $r = 2$.

En este caso tenemos que $\vec{n} = \frac{-1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$, entonces

$$T_P S : ((x, y, z) - (1, 1, \sqrt{2})) \cdot \frac{-1}{2}(1, 1, \sqrt{2}) = 0$$

$$T_P S : x + y + \sqrt{2}z = 4.$$

Ejemplo 2.6.9. Si la superficie es la gráfica de una función $z = f(x, y)$, definida en el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, hemos visto que se pueden considerar las variables x e y como parámetros y obtener así la parametrización

$$\Phi : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$$

en este caso

$$\Phi_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y)), \quad \Phi_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$$

por lo que el vector normal viene dado por $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$ y, por tanto, el producto vectorial nunca es cero y todos los puntos son regulares. Por tanto, el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene la forma

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

es decir $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Ejemplo 2.6.10. Para una superficie de revolución parametrizada por

$$\Phi(t, \theta) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)),$$

donde $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi]$ se obtiene, que

$$\Phi_t(t, \theta) = (y'(t) \cos \theta, y'(t) \sin \theta, z'(t)) \quad \text{y} \quad \Phi_\theta(t, \theta) = (-y(t) \sin \theta, y(t) \cos \theta, 0)$$

De esta forma su producto vectorial es

$$\Phi_t(t, \theta) \wedge \Phi_\theta(t, \theta) = (-y(t)z'(t) \cos \theta, -y(t)z'(t) \sin \theta, y'(t)y(t)).$$

En particular, obtenemos que $\|\Phi_t(t, \theta) \wedge \Phi_\theta(t, \theta)\|^2 = y(t)^2(y'(t)^2 + z'(t)^2)$. De esta forma, el punto $\Phi(t, \theta)$ es regular si y sólo si, $y(t) \neq 0$ (esto es, la curva \mathcal{C} que genera la superficie de revolución no toca al eje de revolución) y el punto $(0, y(t), z(t))$ es un punto regular de la curva \mathcal{C} . En particular, si todos los puntos de la curva \mathcal{C} tienen primera coordenada positiva y son puntos regulares entonces todos los puntos de la superficie obtenida son regulares. Esto es lo que sucede, por ejemplo, con el toro de revolución. En este caso el producto vectorial es

$$\Phi_u(u, \theta) \wedge \Phi_\theta(u, \theta) = -(a+b \cos u)b \cos u \cos \theta, -(a+b \cos u)b \cos u \sin \theta, -(a+b \cos u)b \sin u)$$

y, por tanto, obtenemos que $\|\Phi_u(u, \theta) \wedge \Phi_\theta(u, \theta)\|^2 = b^2(a + b \cos u)^2 \neq 0$ puesto que $a > b > 0$. Entonces, si se verifica que $y(t_0) \neq 0$, el plano tangente en el punto $\Phi(t_0, \theta_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$-z'(t_0) \cos \theta_0(x - x_0) - z'(t_0) \sin \theta_0(y - y_0) + y'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Por ejemplo, si consideramos el toro parametrizado por

$$\Phi(u, \theta) = ((2 + \cos u) \cos \theta, (2 + \cos u) \sin \theta, \sin u),$$

donde $(u, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. En el punto $\Phi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, 2, 1)$ el plano tangente es $z = 1$ ya que, en este caso, $z(u) = \sin u$ y $z'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

2.6.2. Área de superficies parametrizadas

De los temas de geometría, podrían estar familiarizados con las áreas de algunas superficies específicas. Por ejemplo, el área de una esfera con radio r es $4\pi r^2$.

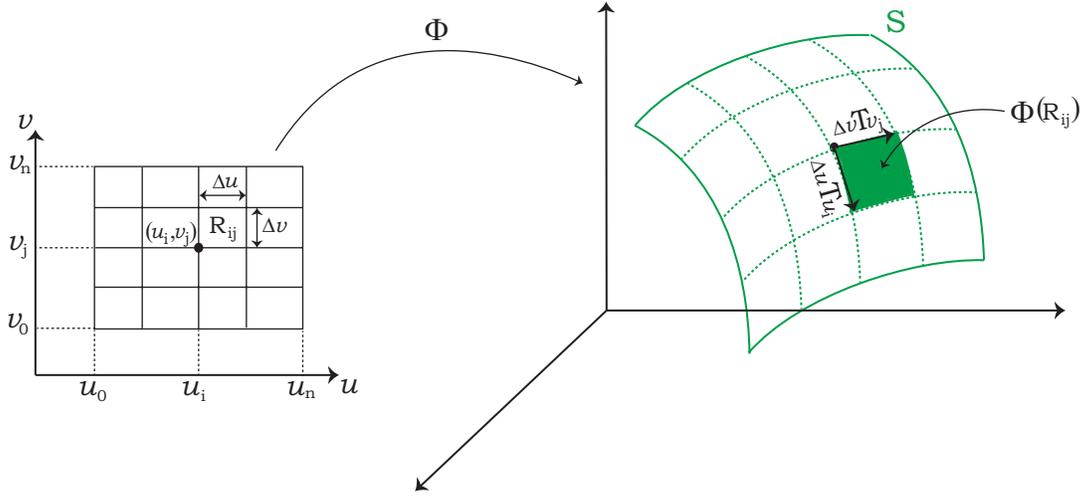
Pero ¿qué pasa si alguien nos da una superficie arbitraria, definida mediante alguna función paramétrica? ¿Cómo encontrar su área?

La respuesta es utilizar una cierta integral, o más bien cierta integral doble. Esto es análogo a la forma en la que encontramos la longitud de arco de una curva arbitraria utilizando una integral de línea.

Definición 2.6.7. Sea $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización inyectiva regular de una superficie S . Definimos el **área de S** como:

$$A(S) = \iint_D \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| dudv.$$

Veamos la justificación de esta definición.



$$A(\Phi(R_{ij})) \approx \|\Delta u \Phi_u \wedge \Delta v \Phi_v(u_i, v_j)\| = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v$$

$$A(\Phi(R_{ij})) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v$$

$$A(\Phi(D)) = \lim_{R_{ij} \rightarrow 0} \sum_{i,j} A(\Phi(R_{ij})) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv.$$

Ejemplo 2.6.11 (Esfera). Consideremos la parametrización de la esfera dada por

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v) \end{aligned}$$

Entonces $\Phi_u = (-r \sin u \sin v, r \cos u \sin v, 0)$ y $\Phi_v = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r \sin v)$.

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = r^2 \sin v.$$

Entonces, $A(S^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \sin v dv = 4\pi r^2$.

$$A(S^2) = 4\pi r^2.$$

Ejemplo 2.6.12 (Toro). Consideremos la parametrización $\Phi(u, v) = ((a+b \cos u) \cos v, (a+b \cos u) \sin v, b \sin u)$, $u, v \in [0, 2\pi]$.

Entonces $\Phi_u = (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u)$, $\Phi_v = (-(a+b \cos u) \sin v, (a+b \cos u) \cos v, 0)$.

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = b(a + b \cos u).$$

$$A(T^2) = r \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (a + b \cos u) du = 4ab\pi^2.$$

Ejemplo 2.6.13 (Cono). Consideremos la parametrización

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r),$$

donde $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Entonces $\|\Phi_r(r, \theta) \wedge \Phi_\theta(r, \theta)\| = \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{2}r$. De lo que concluimos que:

$$A(\text{Cono}) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r dr d\theta = 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 r dr = \sqrt{2}\pi.$$

Ejemplo 2.6.14 (Helicoide). El helicoide se genera por una recta que se mueve apoyándose en una hélice y en el eje del cilindro que la contiene, con el cual forma constantemente un mismo ángulo. Consideremos la parametrización dada como

$$\Phi : (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$$

Haciendo cuentas obtenemos que $\|\Phi_r(r, \theta) \wedge \Phi_\theta(r, \theta)\| = \sqrt{r^2 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{r^2 + 1}$. Por lo tanto

$$A(\text{Helicoide}) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} dr = \pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})).$$

A continuación veremos familias de superficies que admiten fórmulas particulares para hallar su área.

Área de gráfica de funciones

Consideremos S una superficie definida por la ecuación $z = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable. Como vimos anteriormente una parametrización de la superficie es $\Phi : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\Phi_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y)), \quad \Phi_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$$

Por lo tanto

$$\|\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y)\| = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$$

De lo cual deducimos que

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

Ejemplo 2.6.15. Sea S la superficie dada por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 < 1$. Entonces

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = (5\sqrt{5} - 1) \frac{\pi}{6}.$$

Área de superficies de revolución

Sea S la superficie que se obtiene al girar el gráfico de $y = f(x)$.

- Si giramos el gráfico alrededor del eje x . La superficie que obtenemos se puede parametrizar por:

$$\Phi : (u, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(u, \theta) = (u, f(u) \cos \theta, f(u) \sin \theta) \in \mathbb{R}^3$$

Entonces

$$\Phi_u(u, \theta) = (1, f'(u) \cos \theta, f'(u) \sin \theta) \quad y \quad \Phi_\theta(u, \theta) = (0, -f(u) \sin \theta, f(u) \cos \theta).$$

Luego

$$\Phi_u(u, \theta) \wedge \Phi_\theta(u, \theta) = (f(u)f'(u), -f(u) \cos \theta, -f(u) \sin \theta)$$

Tomando módulo obtenemos que

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \sqrt{f(u)^2 + f(u)^2 f'(u)^2} = 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

- Si ahora giramos el gráfico alrededor del eje y . La superficie que obtenemos se puede parametrizar por:

$$\Phi : (u, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, f(u)) \in \mathbb{R}^3$$

Entonces

$$\Phi_u(u, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, f'(u)) \quad y \quad \Phi_\theta(u, \theta) = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 0).$$

Luego

$$\Phi_u(u, \theta) \wedge \Phi_\theta(u, \theta) = (-uf'(u) \cos \theta, -uf'(u) \sin \theta, u)$$

Tomando módulo obtenemos que

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \sqrt{u^2 f'(u)^2 + u^2} = 2\pi \int_a^b |u| \sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

2.6.3. Orientación de superficies parametrizadas

Una **orientación** de una superficie S es, por definición, una función continua $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $p \in S$, $\mathbf{N}(p)$ es un vector unitario normal a la superficie S en el punto p . Cuando existe una tal orientación, decimos que la superficie S es **orientable**.

Toda superficie dada como el gráfico de una función de clase C^1 es orientable. En efecto, si una superficie S viene dada como gráfica de una función h de clase C^1 en un dominio D , sabemos que una parametrización de la misma es la función $\Phi(x, y) = (x, y, h(x, y))$ para

cada $(x, y) \in D$, por lo tanto el vector no nulo $\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$ es normal a la superficie en el punto $(x, y, h(x, y))$ y su norma es

$$\|\Phi_x(x, y) \wedge \Phi_y(x, y)\| = \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}.$$

Basta entonces definir

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}} (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$$

para todo punto $(x, y, z) = (x, y, h(x, y)) \in S$, para obtener una orientación de la superficie S .

Toda superficie en forma implícita es orientable. Si consideremos la superficie S dada como

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : g(x, y, z) = 0\},$$

donde Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 y g es una función de clase C^1 en Ω que se anula en algún punto de Ω y cuyo gradiente no se anula en ningún punto de S . Sabemos entonces que, para cada punto $(x, y, z) \in S$, el vector $\nabla g(x, y, z)$ es normal a la superficie S en dicho punto, por lo tanto para obtener una orientación de la superficie basta definir

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|}.$$

Ejemplo 2.6.16. Para obtener una orientación de la esfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2\}$$

basta definir

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{1}{r}(x - a, y - b, z - c),$$

para todo $(x, y, z) \in S$.

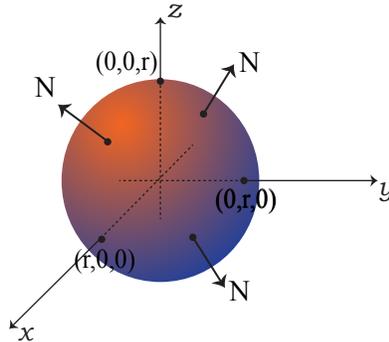


Figura 2.5: Orientación de la esfera de centro el origen y radio r

Pasando finalmente el caso general de una superficie paramétrica, supongamos que $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la superficie $S = \Phi(D)$, tal que la función Φ es inyectiva en todo D y verifica que $\Phi_u \wedge \Phi_v \neq 0$ para todo $(u, v) \in D$. En particular Φ es una parametrización simple y regular. Cada punto $(x, y, z) \in S$ tiene la forma $\Phi(u, v)$ para un único punto $(u, v) \in D$. Se puede demostrar que Φ^{-1} es una función continua de S en D y obtenemos entonces una orientación de la superficie S definiendo por

$$\mathbf{N}(x, y, z) = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}(\Phi^{-1}(x, y, z)) \quad \forall (x, y, z) \in S.$$

Como ocurre en los ejemplos anteriores, una superficie orientable ha de ser regular en todos sus puntos, para que dispongamos de vectores normales en todos ellos. El ejemplo más conocido de una superficie simple, que es regular en todos sus puntos pero no es orientable, es la llamada banda de Möbius.

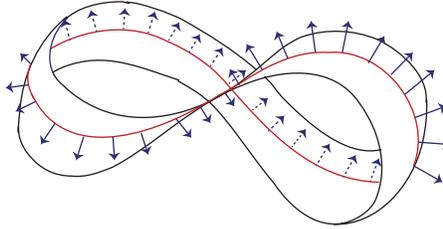


Figura 2.6: Banda de Möbius

Es natural preguntarse cuantas orientaciones admite una superficie orientable. De entrada al menos dos, puesto que si \mathbf{N} es una orientación, $-\mathbf{N}$ es otra. Las superficies que admiten una parametrización simple y regular, no pueden tener más de dos orientaciones. Esto es consecuencia del siguiente resultado.

Proposición 2.6.8. *Sea \mathbf{N} una orientación de la superficie $S = \Phi(U)$, donde Φ es una parametrización simple y regular, definida en $U \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, se verifica que*

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \sigma \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \quad (2.7)$$

para todo $(u, v) \in U$ donde σ es constante, pudiendo valer 1 o -1 . Cuando $\sigma = 1$ decimos que la parametrización Φ **preserva la orientación \mathbf{N}** mientras que cuando $\sigma = -1$ decimos que Φ **revierte la orientación \mathbf{N}** .

Demostración. Observamos en primer lugar que basta probar la igualdad (2.7) para $(u, v) \in D$ donde D es el interior del dominio U . Esto es porque los dos miembros de dicha igualdad son funciones continuas en el dominio U entonces, si coinciden en D también lo habrán en la clausura, que es U .

Para $(u, v) \in D$, por ser la parametrización Φ regular, tenemos que la función $\Phi_u \wedge \Phi_v$ toma un valor no nulo en el punto (u, v) , que es un vector normal a la superficie S en el punto $\Phi(u, v)$. Por definición de orientación, lo mismo le ocurre al vector $\mathbf{N}(\Phi(u, v))$, que

también es normal a la superficie en el punto $\Phi(u, v)$, entonces estos vectores deberán ser uno múltiplo del otro. Por lo tanto

$$\frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} = \pm \mathbf{N}(\Phi(u, v)).$$

Consideremos entonces la función $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(u, v) = \left\| \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} - \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \right\|,$$

tenemos que λ sólo toma los valores 0 y 2. Pero λ es una función continua en el dominio D , con lo que no puede tomar ambos valores. Por tanto, o bien λ es nula en D , y se cumple (2.7) con $\sigma = 1$, o bien λ es constantemente igual a 2 en D , y se cumple (2.7) con $\sigma = -1$. \square

Veamos ahora por que una superficie orientable que admite una parametrización simple y regular admite exactamente dos orientaciones.

Corolario 2.6.9. *Sea S superficie orientable, con orientación \mathbf{N} , que admite una parametrización simple y regular. Supongamos que \mathbf{N}_1 es otra orientación de la superficie. Entonces $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}$ o $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}$.*

Demostración. En efecto, la orientación \mathbf{N}_1 también verificará (2.7), es decir

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \sigma_1 \mathbf{N}_1(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|,$$

para todo $(u, v) \in U$, con $\sigma_1 = \pm 1$. Por lo tanto

$$\sigma_1 \mathbf{N}_1(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sigma \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \quad \forall (u, v) \in U.$$

Usando que $\Phi_u \wedge \Phi_v$ no se anula en D deducimos que

$$\mathbf{N}_1(\Phi(u, v)) = \tau \mathbf{N}(\Phi(u, v)) \quad \forall (u, v) \in D,$$

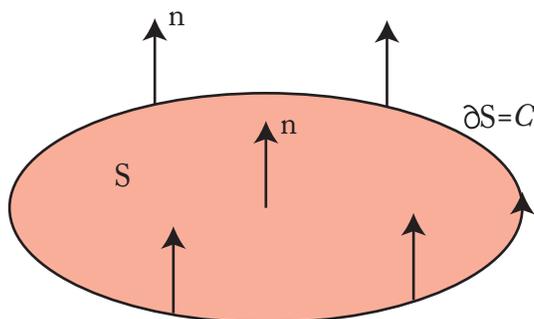
donde también $\tau = \pm 1$. Finalmente, usando que U es la clausura de D , concluimos que la igualdad anterior se verifica en todo el dominio U , lo que equivale a decir que $\mathbf{N}_1 = \tau \mathbf{N}$, como queríamos. \square

Intuitivamente, las dos orientaciones de una superficie se corresponden con sus dos “caras”, de forma que una orientación \mathbf{N} corresponderá a la cara de la superficie en la que debemos situarnos (se entiende con los pies en la superficie) de forma que, en cada punto \mathbf{p} , el vector normal unitario $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ apunte hacia arriba. En términos igualmente intuitivos, una superficie es orientable cuando tiene dos caras. En la práctica suele ser fácil distinguir las dos orientaciones de una superficie, como veremos en los ejemplos.

Para una superficie dada como el gráfico de una función el vector normal $\mathbf{N}(x, y, z)$ se caracteriza en tener la tercer coordenada siempre positiva, podríamos decir que el vector normal apunta siempre hacia arriba. Intuitivamente esta orientación corresponde a la “cara superior” de la superficie.

Orientación borde

Si S es una superficie orientada con borde ∂S , la **orientación del borde coherente** con la orientación de la superficie se puede caracterizar informalmente como aquella en la que: “Al andar sobre el borde con el vector normal a la superficie apuntando a la cabeza, la superficie queda a la izquierda”.



Si $\Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización y S es una superficie paramétrica dada por $\Phi(U) = S$ donde $U \subset V$, definimos la **frontera** de S como $\partial S = \Phi(\partial U)$. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂U recorrida en sentido positivo (dejando la región U a la izquierda), ∂S es la curva cerrada simple regular (o regular a trozos) orientada que es la imagen de la función $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por la composición $\eta(t) = \Phi(\alpha(t))$, con la orientación inducida por la de η . Si S es orientada y Φ preserva la orientación, entonces, la **orientación de ∂S inducida por η es coherente con la de S** .

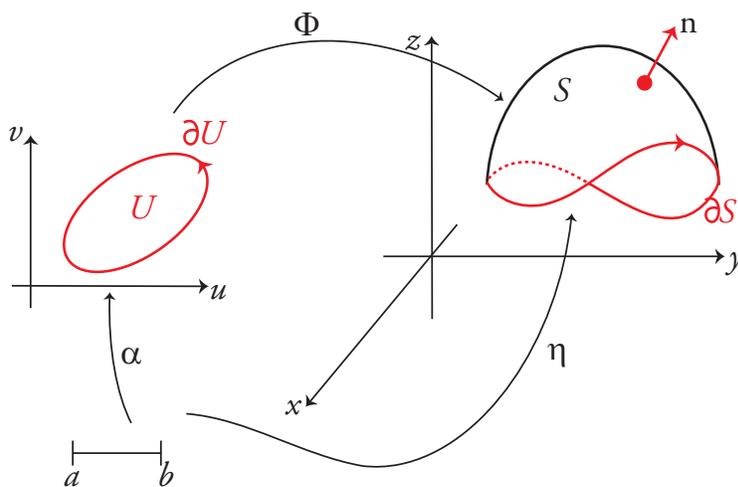


Figura 2.7: Orientación del borde ∂S coherente con la orientación de S

Observación 2.6.10. Se puede comprobar que si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ son parametrizaciones de S que definen la misma orientación sobre ella, también definen la misma

orientación en ∂S , y si definen orientaciones opuestas en S , también definen orientaciones opuestas en el borde.

También se puede escoger una orientación de una superficie decidiendo el sentido de recorrido que debe tener el borde de la superficie. Geométricamente, la relación entre la orientación del vector normal y la orientación del borde de una superficie se rige por la “regla del sacacorchos”: el sentido del vector normal es el de avance de un tornillo cuya cabeza fuese la superficie y girase en el sentido indicado en el borde de S .

2.7. Integrales de superficie

Podemos considerar esta nueva integral como el equivalente bidimensional de la integral de línea, siendo la región de integración una superficie en vez de una curva.

Definimos las integrales de línea mediante una representación paramétrica de la curva. Ahora haremos lo propio con las integrales de superficie. Demostraremos luego que, bajo ciertas condiciones generales, el valor de la integral es independiente de la representación.

2.7.1. Integrales de campos escalares

Definición 2.7.1. Sea S una superficie con parametrización $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y sea $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Definimos la **integral de f sobre S** como

$$\iint_S f dS = \iint_U f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| du dv.$$

Las interpretaciones físicas de estas integrales son variadas. Por ejemplo, un campo escalar $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ puede representar la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S , y entonces $\iint_S f dS$ sería la masa total de dicho material.

Estudemos ahora la independencia de la parametrización escogida de estas integrales.

Lema 2.7.2. Sean $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ y $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de clase C^1 de una misma superficie S , y sea $h : V \rightarrow U$ el difeomorfismo de clase C^1 definido por $h = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Denotemos $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$. Entonces

$$\Psi_x \wedge \Psi_y = (\Phi_u \wedge \Phi_v) \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)},$$

donde $\frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)}$ denota el jacobiano de h .

Demostración. Por la regla de la cadena tenemos

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

y también

$$\Psi_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y}.$$

Multiplicando vectorialmente los miembros de la derecha de ambas igualdades, y utilizando las propiedades del producto vectorial tenemos que

$$\Psi_x \wedge \Psi_y = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)}$$

que es lo que queríamos. \square

Teorema 2.7.3. Sean $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ y $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de clase C^1 de una misma superficie S , y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces

$$\iint_U f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| dudv = \iint_V f(\Psi(x, y)) \|\Psi_x(x, y) \wedge \Psi_y(x, y)\| dxdy.$$

Es decir, la integral $\iint_S f dS$ no depende de la parametrización escogida.

Demostración. Denotemos $h = (h_1, h_2)$ donde $h = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Se tiene que $\Psi = \Phi \circ h$, y aplicando el teorema del cambio de variable junto con el lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_U f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| dudv &= \\ \iint_V f(\Phi(h(x, y))) \|\Phi_u(h(x, y)) \wedge \Phi_v(h(x, y))\| \left| \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)} \right| dxdy &= \\ \iint_V f(\Psi(x, y)) \|\Psi_x(x, y) \wedge \Psi_y(x, y)\| dxdy. \end{aligned}$$

\square

Propiedades de las integrales de superficie de campos escalares

1. Sea S una superficie paramétrica, f, g dos campos escalares continuos en S , y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_S f dS + \beta \iint_S g dS.$$

2. Si para todo $(x, y) \in S$ se verifica que $f(x, y) \leq g(x, y)$, siendo S una superficie paramétrica y f y g campos escalares continuos en S entonces

$$\iint_S f dS \leq \iint_S g dS.$$

3. Si $S = S_1 \cup S_2$ disjuntas salvo quizás puntos del borde, entonces

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS.$$

4. Sean S una superficie paramétrica y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Tomemos una constante $M > 0$ de forma que $|f(x, y, z)| \leq M$ para todo punto $(x, y, z) \in S$. Entonces

$$\left| \iint_S f dS \right| \leq M \text{Área}(S).$$

Ejemplo 2.7.1. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ un campo escalar y

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \theta : \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}.$$

Hallar $\iint_S f dS$.

Consideremos la parametrización $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi_r(r, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), & \Phi_\theta(r, \theta) &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1) \\ \Rightarrow \Phi_r \wedge \Phi_\theta &= (\sin \theta, -\cos \theta, r) \text{ y } \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| &= \sqrt{1 + r^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado $f(\Phi(r, \theta)) = \sqrt{1 + r^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \iint_U f(\Phi(r, \theta)) \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2) dr d\theta = 2\pi \left(r + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7.2. Sea S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hallar

$$\iint_S z^2 dS.$$

Consideremos la parametrización

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u \sin v, \sin u \sin v, r \cos v) \end{aligned}$$

Para esta parametrización sabemos que

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sin v,$$

y $f(\Phi(u, v)) = \cos^2 v$. Entonces

$$\iint_S z^2 dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 v \sin v du dv = 2\pi \int_0^\pi \cos^2 v \sin v dv = \frac{4\pi}{3}.$$

Observación 2.7.4. Si S es una superficie dada por la gráfica de $z = g(x, y)$ con g de clase C^1 definida en D y f función continua sobre S entonces:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy.$$

Ejemplo 2.7.3. Sea S la superficie dada por $z = x^2 + y$ en $[0, 1] \times [-1, 1]$, encontrar $\iint_S x dS$.

$$\begin{aligned} \iint_S x dS &= \iint_D x \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 x \sqrt{1 + (2x)^2 + 1^2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} dx dy = 2 \int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} dx \\ &= \frac{2}{8} \int_2^6 \sqrt{u} du = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Observación 2.7.5. Si S tiene densidad de masa $m(x, y, z)$ en (x, y, z) . Entonces su masa total es:

$$M(S) = \iint_S m(x, y, z) dS.$$

Ejemplo 2.7.4. Sea S el helicoido con parametrización $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ en $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ con densidad de masa en (x, y, z) igual al doble de la distancia al eje. Hallar la masa total de S .

$m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{1 + u^2}$. Entonces

$$M(S) = \iint_S 2u dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2u \sqrt{1 + u^2} du dv = 2\pi \int_0^1 2u \sqrt{1 + u^2} du = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1).$$

2.7.2. Integrales de campos vectoriales

Definición 2.7.6. Sea $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S y $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Definimos la **integral de X sobre Φ** como

$$\iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S} = \iint_D X(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)) du dv.$$

Ejemplo 2.7.5. Sea $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, donde $\Phi(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$. Calcular $\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

$$\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{r}(\Phi(\theta, \phi)) \cdot (\Phi_{\theta} \wedge \Phi_{\phi}) d\theta d\phi.$$

$$\mathbf{r}(\Phi(\theta, \phi)) \cdot (\Phi_{\theta} \wedge \Phi_{\phi}) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi \end{vmatrix} = -\sin \phi.$$

Entonces $\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = -\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi d\theta d\phi = 2\pi \cos \phi \Big|_0^{\pi} = -4\pi.$

Teorema 2.7.7. Sean S una superficie orientada, $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones regulares de S que preservan orientación. Si X es un campo vectorial continuo entonces

$$\iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Psi} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Demostración. Como las dos parametrizaciones preservan la orientación tenemos que

$$\frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} = \mathbf{N} = \frac{\Psi_x \wedge \Psi_y}{\|\Psi_x \wedge \Psi_y\|}.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S} &= \iint_U X(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)) du dv \\ &= \iint_U X(\Phi(u, v)) \cdot \mathbf{N} \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| du dv \\ &= \iint_U (X \cdot \mathbf{N})(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| du dv \\ &= \iint_V (X \cdot \mathbf{N})(\Psi(x, y)) \|\Psi_x(x, y) \wedge \Psi_y(x, y)\| dx dy \\ &= \iint_V X(\Psi(x, y)) \cdot \mathbf{N} \|\Psi_x(x, y) \wedge \Psi_y(x, y)\| dx dy \\ &= \iint_V X(\Psi(x, y)) \cdot (\Psi_x(x, y) \wedge \Psi_y(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{\Psi} X \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.7.8. Sea S una superficie orientada, $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización regular que preserva orientación y $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización regular que revierte orientación. Si X es un campo vectorial continuo entonces

$$\iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{\Psi} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Los resultados previos nos permiten realizar la siguiente definición.

Definición 2.7.9. Sea S una superficie orientada y $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización regular que preserva orientación. Si X un campo vectorial continuo definido sobre S definimos el **flujo de X sobre S** como:

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Proposición 2.7.10. Si S es una superficie orientada y X es un campo continuo definido sobre S entonces

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_S X \cdot \mathbf{N} dS.$$

Demostración. Sea Φ una parametrización que preserva orientación.

$$\begin{aligned}
 \iint_S X \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \iint_U X(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)) dudv \\
 &= \iint_U X(\Phi(u, v)) \cdot \frac{(\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v))}{\|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\|} \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| dudv \\
 &= \iint_U (X \cdot \mathbf{N})(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| dudv \\
 &= \iint_S X \cdot \mathbf{N} dS.
 \end{aligned}$$

□

Propiedades de las integrales de superficie de campos vectoriales

1. Sea S una superficie paramétrica orientada, X, Y dos campos vectoriales continuos en S y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\iint_S (\alpha X + \beta Y) \cdot d\mathbf{S} = \alpha \iint_S X \cdot d\mathbf{S} + \beta \iint_S Y \cdot d\mathbf{S}.$$

2. Si $S = S_1 \cup S_2$ disjuntas salvo quizás puntos del borde, entonces

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X \cdot d\mathbf{S}.$$

3. Sean S una superficie paramétrica orientada y X un campo vectorial continuo en S . Sea K tal que $\|X(x, y, z)\| \leq K$ para todo $(x, y, z) \in S$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se comprueba que

$$\left| \iint_S X \cdot d\mathbf{S} \right| \leq K \text{Área}(S).$$

La integral de un campo vectorial sobre una superficie S suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S . Puede imaginarse que S es una membrana porosa y que el campo vectorial $X(x, y, z) = \rho(x, y, z)V(x, y, z)$, donde $V(x, y, z)$ es la velocidad del fluido y $\rho(x, y, z)$ es su densidad de masa, es el vector que nos dice cuánta masa de fluido pasa por el punto (x, y, z) en la dirección en que se mueve el fluido, por unidad de área y de tiempo. Entonces el producto escalar $X \cdot \mathbf{N}$ representa la componente del vector densidad de flujo en la dirección de \mathbf{N} , y la masa de fluido que pasa a través de toda S por unidad de tiempo estará determinada por $\iint_S X \cdot \mathbf{N} dS = \iint_S X \cdot d\mathbf{S}$.

Ejemplo 2.7.6 (Aplicación física: flujo de calor). Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto $(x, y, z) \in S \subset \mathbb{R}^3$, S una superficie. Si T es C^1 entonces

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

es el gradiente de temperatura, y el calor fluye según el campo vectorial $X = -k\nabla T$ donde k es una constante positiva llamada **conductividad**. Notar que el flujo de calor, como cabe esperar, se produce de las zonas calientes hacia las frías, pues $-\nabla T$ apunta en la dirección donde T decrece.

La tasa total de flujo o flujo de calor a través de la superficie S viene dada por

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S}.$$

Consideremos la siguiente función de temperatura, $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada según la normal exterior. Hallar el flujo de calor a través de S suponiendo que $k = 1$.

Se tiene que $X(x, y, z) = -\nabla T(x, y, z) = -2(x, y, z)$. Como $\mathbf{N} = \mathbf{r} = (x, y, z)$ se sigue que $X \cdot \mathbf{N} = -2(x^2 + y^2 + z^2) = -2$. Entonces

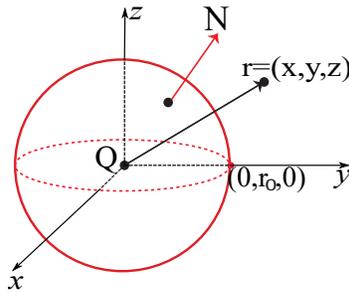
$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_S X \cdot \mathbf{N} dS = -2 \iint_S dS = -8\pi.$$

El flujo de calor es negativo, entonces la temperatura fluye en sentido contrario a la normal \mathbf{N} , por lo tanto X apunta en promedio hacia adentro, es decir el centro se calienta, hay ganancia de temperatura.

Ejemplo 2.7.7 (Aplicación física: Ley de Gauss). El flujo del campo eléctrico sobre cualquier superficie cerrada (con normal saliente) es igual a la carga neta encerrada en esa superficie dividida por la permitividad del vacío.

$$\iint_S E \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Consideremos el campo eléctrico $E(\mathbf{r}) = k\frac{Q}{r^3}\mathbf{r}$ a través de la esfera de centro Q , radio r_0 con la normal \mathbf{N} saliente.



En este caso

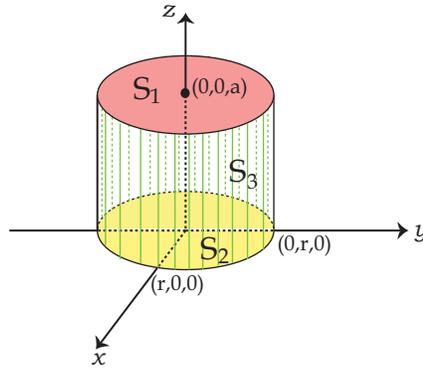
$$E \cdot \mathbf{N} = \frac{kQ}{r_0^2}$$

$$\Rightarrow \iint_S E \cdot d\mathbf{S} = \frac{kQ}{r_0^2} \iint_S dS = \frac{kQ}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Definición 2.7.11. Sea S una superficie que es unión finita de superficies paramétricas, S_1, \dots, S_n dos a dos disjuntas o tales que su intersección es unión finita de curvas regulares. Entonces, si $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definimos el **flujo de X sobre S** como:

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X \cdot d\mathbf{S} + \dots + \iint_{S_n} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Ejemplo 2.7.8. Sea S el cilindro con tapas, como se muestra en la siguiente figura, orientado con la normal saliente.



Esta superficie se obtiene como la unión de tres superficies paramétricas, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, z = a\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, z = 0\} \text{ y}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq a\}$$

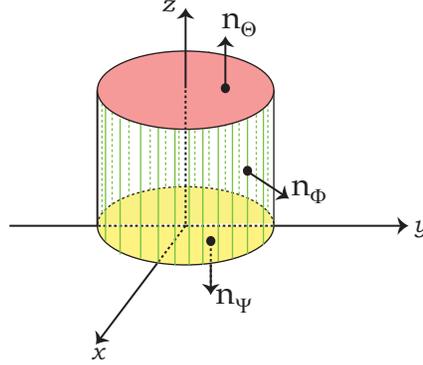
Veamos como parametrizar a S de forma que las parametrizaciones sean compatibles con la orientación de la superficie. Sean $\Theta, \Psi : [0, 2\pi) \times (0, r] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $\Theta(u, v) = (v \sin u, v \cos u, a)$, $\Psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$ y $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$, parametrizaciones de S_1 , S_2 y S_3 respectivamente. Veamos que los vectores normales son salientes.

$$n_{\Theta(u,v)} = \frac{(v \cos u, -v \sin u, 0) \wedge (\sin u, \cos u, 0)}{\|(v \cos u, -v \sin u, 0) \wedge (\sin u, \cos u, 0)\|} = \frac{(0, 0, v)}{v} = (0, 0, 1).$$

$$n_{\Psi(u,v)} = \frac{(-v \sin u, v \cos u, 0) \wedge (\cos u, \sin u, 0)}{\|(-v \sin u, v \cos u, 0) \wedge (\cos u, \sin u, 0)\|} = \frac{(0, 0, -v)}{v} = (0, 0, -1).$$

$$n_{\Phi(u,v)} = \frac{(-r \sin u, r \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1)}{\|(-r \sin u, r \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1)\|} = \frac{(r \cos u, r \sin u, 0)}{r} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Por lo tanto estas son parametrizaciones que preservan la orientación de S , con normal exterior.



Consideremos el campo $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (0, 0, z)$. Hallar $\iint_S X \cdot d\mathbf{S}$.

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_3} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Como $X \perp n_\Phi$ tenemos que $\iint_{S_3} X \cdot d\mathbf{S} = 0$.

Por otro lado, si calculamos $X(\Psi(u, v)) = (0, 0, 0)$, entonces $\iint_{S_2} X \cdot d\mathbf{S} = 0$. Por lo tanto

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X \cdot n d\mathbf{S} = \iint_{S_1} a d\mathbf{S} = a\pi r^2.$$

2.8. Teorema de Green

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. Este tipo de teoremas resulta muy útil porque, dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre la cual hay que integrarlo, podemos elegir la posibilidad más simple entre integrar el campo directamente sobre la curva o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre el recinto que delimita la curva. Por otro lado, la relación así establecida entre la integral de línea sobre una curva y la integral doble sobre la región interior a esta permite a veces obtener información sobre una función o su integral en un recinto a partir del comportamiento de la función sobre la frontera de dicho recinto.

Antes de enunciar el teorema de Green vamos a precisar qué entendemos por una curva cerrada simple **orientada positivamente**. Sabemos ya que toda curva simple tiene dos

posibles orientaciones, y que éstas son invariantes por reparametrizaciones cuyas funciones de cambio de variables tienen derivada positiva. Ahora bien, ¿cómo distinguir entre una y otra orientación? ¿Qué hacer para privilegiar y reconocer una de las dos? Hay varios procedimientos para conseguir esto.

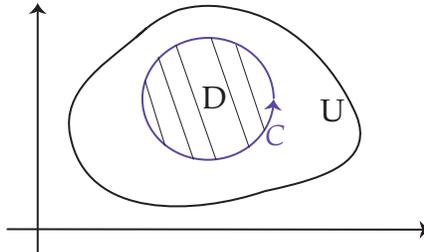
Para distinguir el sentido de recorrido de la curva cerrada \mathcal{C} en un dibujo hacen falta tres puntos: indicando el orden por el que se debe pasar por tres puntos. Esto determina unívocamente la orientación de la curva.

Cuando se trata de curvas planas, hay además otros criterios clásicos: se puede decidir si la curva debe recorrerse en sentido horario o en sentido anti-horario. Por convención se suele considerar que el sentido anti-horario es el sentido positivo, y el sentido horario es el negativo. Y como este criterio es difícil de distinguir si la curva es muy grande, o muy complicada, también se puede decidir indicando si la región acotada por la curva debe quedar a la izquierda según se recorre la curva (sentido positivo) o a la derecha (sentido negativo).

Teorema 2.8.1 (Teorema de Green). *Sea \mathcal{C} una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en \mathbb{R}^2 y sea D la unión de la región interior a \mathcal{C} con la curva \mathcal{C} . Sea $X = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contenga a D . Entonces*

$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy. \quad (2.8)$$

Demostración.



Probar (2.8) es equivalente a probar las dos siguientes igualdades

$$\oint_{\mathcal{C}} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (2.9)$$

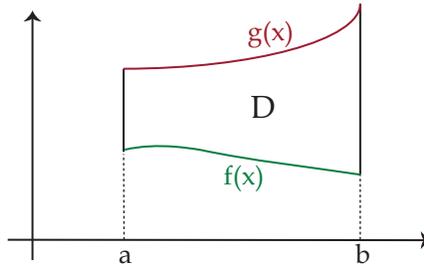
$$\oint_{\mathcal{C}} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (2.10)$$

En efecto, si estas fórmulas son válidas, obtenemos (2.8) sumándolas. Recíprocamente, si (2.8) es cierta podemos obtener (2.9) tomando $Q = 0$ en (2.8), y de forma análoga obtenemos (2.10), tomando $P = 0$ en (2.8).

Veamos (2.9) para una clase especial de regiones D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde f y g son funciones reales de clase C^1 a trozos.



Esta región D está limitada por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos:

$$C = C_1 + C_2 - C_3 - C_4,$$

(como es costumbre, los signos negativos que preceden a un camino denotan que se recorre el camino en sentido opuesto al especificado); aquí, C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$; C_2 lo está por $\gamma_2(t) = (b, t)$, con $f(b) \leq t \leq g(b)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (t, g(t))$, $a \leq t \leq b$; y C_4 viene dado por $\gamma_4(t) = (a, t)$, $f(a) \leq t \leq g(a)$. Nótese que, a lo largo de C_2 y de C_4 , $x = x(t)$ es constante, luego $dx = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea se anularán, mientras que sobre los restantes caminos es $dx = 1$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx - \int_{C_3} P dx - \int_{C_4} P dx = \\ &= \int_{C_1} P dx - \int_{C_3} P dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt, \end{aligned}$$

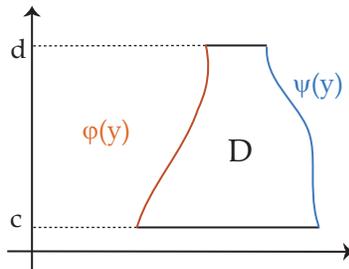
y por otra parte, aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] dx \\ &= \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt. \end{aligned}$$

Combinando estas igualdades se obtiene (2.9).

Ahora probaremos (2.10) para otra clase especial de región D , limitada por las gráficas de dos funciones $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, con $\varphi \leq \psi$. Es decir, ahora tenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$



con φ, ψ funciones reales de clase C^1 . Como antes, D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D$ C^1 a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = -C_1 + C_2 + C_3 - C_4,$$

donde C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (\varphi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; C_2 es $\gamma_2(t) = (t, c)$, con $\varphi(c) \leq t \leq \psi(c)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (\psi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; y C_4 es $\gamma_4(t) = (t, d)$, con $\varphi(d) \leq t \leq \psi(d)$. A lo largo de C_2 y de C_4 , $y = y(t)$ es constante, luego $dy = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea son cero; para C_1 y C_3 se tiene $dy = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} Q dy &= - \int_{C_1} Q dy + \int_{C_2} Q dy + \int_{C_3} Q dy - \int_{C_4} Q dy = \\ &= - \int_{C_1} Q dy + \int_{C_3} Q dy = - \int_c^d Q(\varphi(t), t) dt + \int_c^d Q(\psi(t), t) dt, \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^d [Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(\psi(t), t) dt - \int_c^d Q(\varphi(t), t) dt; \end{aligned}$$

luego, juntando estas igualdades, obtenemos (2.10).

Con lo probado en los pasos 1 y 2, la fórmula de Green es válida para toda región D que sea a la vez de tipo I y de tipo II . Todos los círculos, los rectángulos y los triángulos constituyen ejemplos de regiones que son de tipo I y II simultáneamente.

Para dar la demostración del teorema en una región R se efectúa la descomposición de R en un número finito de regiones de tipo I y II , se aplica el teorema a cada una y se suman los resultados miembro a miembro. Las integrales a lo largo de las fronteras interiores de las distintas subregiones se cancelan dos a dos (pues se recorren dos veces en sentidos opuestos), y la suma de las integrales a lo largo de las fronteras exteriores de dichas subregiones proporciona la integral de línea a lo largo de \mathcal{C} . Por tanto, el teorema de Green es válido para todos estos tipos de curvas. Por otra parte, la suma de las integrales dobles sobre cada una de las subregiones proporciona la integral doble extendida a todo R . Esto terminaría de demostrar el teorema. \square

Ejemplo 2.8.1 (Ejercicio 1). Integrar el campo $F(x, y) = (x, xy)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.

Ejemplo 2.8.2 (Ejercicio 2). Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo 2.8.3 (Ejercicio 3). Hallar el valor de la integral

$$\int_{\mathcal{C}} (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy,$$

donde \mathcal{C} es el borde del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

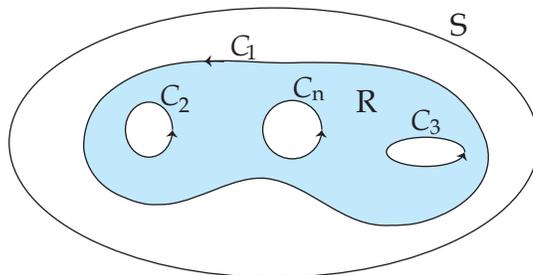


Figura 2.8: Región limitada por curvas de Jordan

Una aplicación muy importante del teorema de Green es el cálculo de áreas de recintos delimitados por curvas cerradas simples mediante una integral de línea sobre el borde de dichas curvas.

Corolario 2.8.2 (Cálculo de Áreas). Si $X = (P, Q)$ tales que $Q_x - P_y = 1$ entonces $\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D dx dy = A(D)$ y por lo tanto (aplicando Green)

$$A(D) = \oint_{\partial D} X \cdot ds.$$

Podemos considerar cualquiera de los siguientes campos para hallar el área de D .

- (i) $X(x, y) = (0, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (ii) $X(x, y) = (-y, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (iii) $X(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Entonces

$$A(D) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

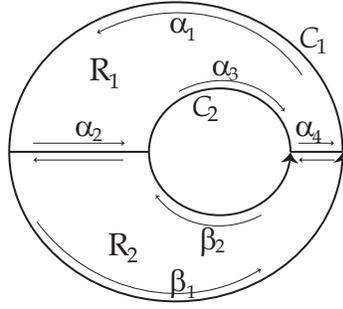
Ejemplo 2.8.4. Hallar el área de la elipse $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, con $a, b > 0$. Consideremos la siguiente parametrización $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t + ab \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

Definición 2.8.3. Una curva es de **Jordan** si es plana, cerrada, simple y C^1 a trozos.

Teorema 2.8.4 (Teorema de Green generalizado). Sean C_1, \dots, C_n n curvas de Jordan, satisfaciendo:

- (i) Dos curvas cualesquiera no se cortan.

Figura 2.9: Curva C en para $n = 2$

(ii) Todas las curvas C_2, \dots, C_n están en el interior de C_1 .

(iii) Cada C_i está en el exterior de C_j ($i \neq j, i, j = 2, \dots, n$).

Sea R la unión de C_1 con la porción interior a C_1 que no está dentro de ninguna C_j ($j = 2, \dots, n$), ver Figura 2.8. Si $X = (P, Q)$ es de clase C^1 en un abierto S que contiene a R , se verifica:

$$\iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{C_1} X \cdot ds - \sum_{j=2}^n \oint_{C_j} X \cdot ds,$$

donde las curvas se consideran con orientación antihoraria.

Demostración. Se introducen cortes que transformen R en una reunión finita de regiones simplemente conexas limitadas por curvas de Jordan, se aplica a cada una el teorema de Green, y se suman miembro a miembro los resultados. Este procedimiento puede justificarse fácilmente para $n = 2$; el caso general sigue por inducción. Sea C la curva dada por $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ y R_1 la región limitada por C , ver Figura 2.9. Como R_1 es simplemente conexas podemos aplicar el teorema de Green y obtenemos

$$\oint_C X \cdot ds = \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dx dy$$

La integral del lado izquierdo se descompone en cuatro integrales, usando al parametrización de C :

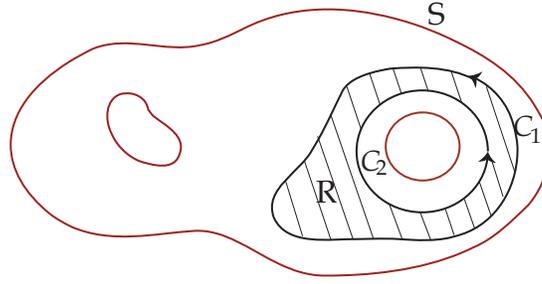
$$\oint_C X \cdot ds = \int_{\alpha_1} X \cdot ds + \int_{\alpha_2} X \cdot ds + \int_{\alpha_3} X \cdot ds + \int_{\alpha_4} X \cdot ds.$$

Sea C' la curva dad por $\beta_1 - \alpha_4 + \beta_2 - \alpha_2$ y R_2 la región limitada por ella. Nuevamente, aplicando Green tenemos que

$$\oint_{C'} X \cdot ds = \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dx dy$$

La integral del lado izquierdo se descompone en cuatro integrales, usando al parametrización de C' :

$$\oint_{C'} X \cdot ds = \int_{\beta_1} X \cdot ds - \int_{\alpha_4} X \cdot ds + \int_{\beta_2} X \cdot ds - \int_{\alpha_2} X \cdot ds.$$

Figura 2.10: Región R del Teorema 2.8.5

Sumando ambas igualdades obtenemos que:

$$\int_{\alpha_1} X \cdot ds + \int_{\beta_1} X \cdot ds + \int_{\alpha_3} X \cdot ds + \int_{\beta_2} X \cdot ds = \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dx dy + \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dx dy$$

Entonces

$$\oint_{C_1} - \oint_{C_2} X \cdot ds = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy.$$

□

Teorema 2.8.5. Sea $X = (P, Q)$ de clase C^1 en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^2$, y supongamos que $Q_x - P_y = 0$ en S .

Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan contenidas en S , satisfaciendo:

- (i) C_2 está en el interior de C_1 .
- (ii) Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 están en S .

Si ambas curvas se recorren en el mismo sentido, entonces

$$\oint_{C_1} X \cdot ds = \oint_{C_2} X \cdot ds.$$

Demostración. Basta aplicar el teorema de Green generalizado con $n = 2$ a la región R constituida por los puntos situados entre C_1 y C_2 junto con las propias curvas, ver Figura 2.10:

$$\oint_{C_1} - \oint_{C_2} X \cdot ds = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \iint_R 0 dx dy = 0$$

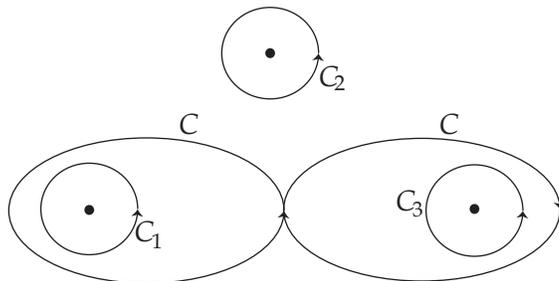
Entonces

$$\oint_{C_1} X \cdot ds = \oint_{C_2} X \cdot ds.$$

□

Este resultado se puede expresar diciendo que si $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$ en S entonces el valor de una integral de línea a lo largo de una curva de Jordan contenida en S no varía cuando ésta se deforma en otra curva de Jordan en S de manera que todas las curvas intermedias permanezcan dentro de S .

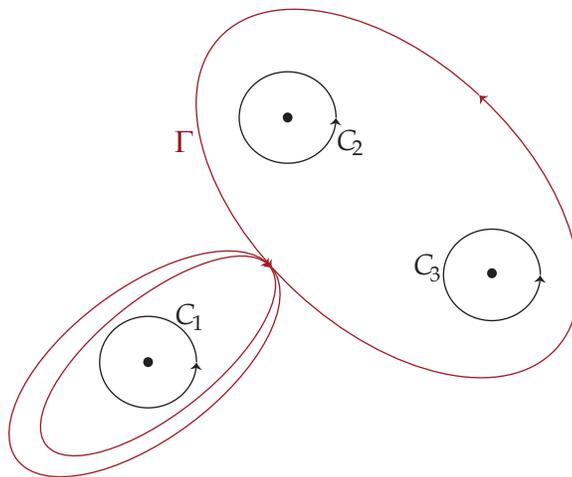
Ejemplo 2.8.5. Sean P, Q dos campos escalares de clase C^1 que satisfacen $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en todo el plano excepto en tres puntos. Sean C_1, C_2, C_3 las tres circunferencias centradas en dichos puntos y C la curva que rodea a C_1 y C_3 que se muestran en la siguiente figura, y sea $I_k = \oint_{C_k} Pdx + Qdy$ ($k = 1, 2, 3$). Supongamos que $I_1 = 12, I_2 = 10$ e $I_3 = 15$.



- (i) Hallar $\oint_C Pdx + Qdy$.
- (ii) Dibujar una curva cerrada Γ a lo largo de la cual $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 1$.
- (iii) Si $I_1 = 12, I_2 = 9$ e $I_3 = 15$, ¿puede existir alguna curva cerrada Γ tal que $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 1$?

(i) $\oint_C Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \oint_{C_3} Pdx + Qdy = I_1 - I_3 = 12 - 15 = -3$.

- (ii) Basta considerar Γ como se muestra en la siguiente figura



$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = I_2 + I_3 - I_1 - I_1 = 10 + 15 - 12 - 12 = 1.$$

- (iii) Si existe tal curva entonces deben existir $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $aI_1 + bI_2 + cI_3 = 12a + 9b + 15c = 1$, entonces $4a + 3b + 5c = \frac{1}{3}$, donde el primer término está en \mathbb{Z} y el segundo en $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ lo cual no admite solución. Entonces no existe una curva Γ con esa propiedad.

2.9. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes es una generalización del teorema de Green en cuanto que relaciona la integral de un campo vectorial sobre una curva cerrada que es borde de una superficie global con la integral de su rotor en dicha superficie.

Teorema 2.9.1 (de Stokes). *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 , regular, orientada según el vector normal unitario n , con borde una curva regular o regular a trozos, cerrada, simple, orientada coherentemente con la orientación de S . Si X es un campo vectorial C^1 en algún abierto que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces*

$$\iint_S \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} X \cdot ds.$$

Teorema 2.9.2 (de Stokes para superficies parametrizadas). *Sea C es una curva plana, regular a trozos, cerrada, simple, orientada en sentido antihorario y designamos por U a la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Supongamos que $\Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización en algún abierto V que contiene a $U \cup C$ y sea $S = \Phi(U)$. S es una superficie paramétrica y $\partial S = \Phi(C)$, el borde de S , una curva regular a trozos, simple, cerrada. La orientación de ∂S queda determinada por la de $C = \partial U$ vía Φ y S está orientada con vector normal dado por Φ . Si X es un campo vectorial C^2 en algún abierto que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces*

$$\iint_S \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} X \cdot ds.$$

Demostración. Sea α la parametrización de C dada por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ($t \in [a, b]$). Si $X = (P, Q, R)$ entonces

$$\text{rot } X = \nabla \wedge X = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Por otra parte, si $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ ($(u, v) \in U$) entonces

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right).$$

Necesitamos probar

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} &= \iint_U \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right) dudv \\ &= \int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz. \end{aligned}$$

y para esto basta demostrar las tres igualdades siguientes

$$\iint_U \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right] dudv = \int_{\partial S} P dx,$$

$$\iint_U \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right] dudv = \int_{\partial S} Q dy,$$

$$\iint_U \left[\frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right] dudv = \int_{\partial S} R dz.$$

Probaremos sólo la primera igualdad, ya que las dos restantes admiten un razonamiento análogo.

Como $\eta(t) = \Phi(\alpha(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$ ($t \in [a, b]$), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx &= \int_a^b (P(\eta(t)), \mathbf{o}, \mathbf{o}) \cdot \eta'(t) dt \\ &= \int_a^b P(\Phi(\alpha(t))) \left(\frac{\partial X}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} v'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b p(\alpha(t)) \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right) \Big|_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) dt = \int_C p \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right), \end{aligned}$$

siendo $p = P \circ \Phi$.

Ahora aplicamos el teorema de Green al campo plano $p \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right)$ sobre la curva C y la región U de la cual es frontera.

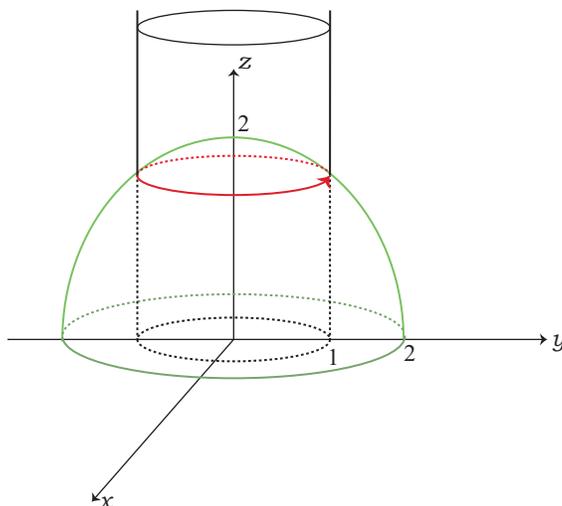
$$\begin{aligned} \int_C p \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right) &= \iint_U \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right] dudv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + p \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - p \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) dudv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) dudv \end{aligned}$$

Recordando que $p(u, v) = P(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) dudv = \\ &= \iint_U \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) \frac{\partial X}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial v} \right) \frac{\partial X}{\partial u} \right] dudv \\ &= \iint_U \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right] dudv. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.9.1. Calcular la circulación del campo de velocidades de un fluido $F(x, y, z) = (\tan^{-1}(x^2), 3x, e^{3z} \tan z)$ a lo largo de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z > 0$.



Apliquemos el teorema de Stokes. Para ello veamos que da el rotor de F :

$$\text{rot}(F) = (0, 0, 3).$$

La superficie sobre la cual vamos a trabajar es el casquete que resulta de interceptar la media esfera con el cilindro, que admite la siguiente parametrización:

$$\Psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{4 - r^2}), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El vector normal a la superficie es

$$\Psi_r \wedge \psi_\theta = \left(\frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} \cos \theta, \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} \sin \theta, r \right).$$

Como la coordenada en z es positiva el vector normal es saliente a la superficie que es la orientación compatible con la orientación dada en la curva.

$$\int_C F \cdot ds = \iint_S \text{rot } F \cdot n = \iint_D \text{rot } F \cdot (\Psi_r \wedge \psi_\theta) dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r dr d\theta = 3\pi.$$

Ejemplo 2.9.2 (Ley de Faraday). Una ley básica de la teoría electromagnética es que si $E(t, x, y, z)$ y $B(t, x, y, z)$ representan los campos eléctrico y magnético en el tiempo t , entonces

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

donde $\text{rot } E$ se calcula manteniendo t fijo. Esta es una de las ecuaciones de Maxwell.

Usemos el teorema de Stokes para determinar lo que esto significa físicamente. Supongamos que S es una superficie a la que se aplica el teorema de Stokes. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} E \cdot ds &= \iint_S \operatorname{rot} E \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S B \cdot d\mathbf{S}.\end{aligned}$$

(La última igualdad se puede justificar si B es de clase C^1). Así, obtenemos

$$\int_{\partial S} E \cdot ds = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S B \cdot d\mathbf{S}.$$

Esta igualdad se conoce como ley de Faraday. La cantidad $\int_{\partial S} E \cdot ds$ representa el voltaje alrededor de ∂S . Además, $\iint_S B \cdot d\mathbf{S}$ se llama flujo de B , o flujo magnético. Si ∂S representa un cable, la ley de Faraday dice que el voltaje inducido en el cable es directamente proporcional a la rapidez con la que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera que tiene por borde a dicho cable.

Ejemplo 2.9.3 (Ley de Ampère). La circulación de un campo magnético a lo largo de una línea cerrada es proporcional a la intensidad neta que atraviesa el área limitada por dicha línea.

Si J densidad de corriente eléctrica, B campo magnético inducido y S superficie con borde C , tenemos que

$$\begin{aligned}\int_C B \cdot ds &= \text{circulación del campo magnético alrededor de } C, \\ I = \iint_S J \cdot d\mathbf{S} &= \text{corriente total que atraviesa } S,\end{aligned}$$

la ley de Ampère dice que

$$\int_C B \cdot ds = \mu_0 \iint_S J \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I,$$

donde μ_0 es la constante de permeabilidad magnética del vacío.

Una de las ecuaciones de Maxwell establece que

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 J.$$

Veamos como deducir la ley de Ampère de esta ecuación, usando el teorema de Stokes.

$$\int_C B \cdot ds = \iint_S \operatorname{rot} B \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mu_0 J \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S J \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

Teorema 2.9.3. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo C^1 , donde U es simplemente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\int_C X \cdot ds = 0$, para toda curva cerrada simple contenida en U .

2. El campo X es de gradientes, es decir, existe $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , tal que $\nabla f = X$.
3. X es un campo irrotacional, es decir, $\text{rot } X = 0$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3), ya lo sabemos. Sólo falta probar que 3) \Rightarrow 1).

Sea C curva cerrada simple contenida en U , como U es simplemente conexo existe una superficie S contenida en U con borde C . Por lo tanto, aplicando el teorema de Sotokes, concluimos que

$$\int_C X \cdot ds = \iint_S \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

□

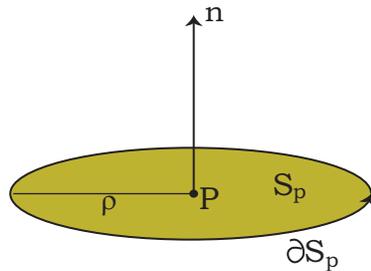
2.9.1. Interpretación intrínseca del rotor

Existe una fórmula intrínseca del rotacional, que en ocasiones se usa como definición del rotor. Dicha fórmula es:

$$n(P) \cdot \text{rot } X(\mathbf{P}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area } S_\rho} \int_{C_\rho} X \cdot ds,$$

donde S_ρ y C_ρ son una superficie que contiene al punto P y su frontera respectivamente.

Consideremos un punto P y un vector unitario n . Denotemos por S_ρ el disco de radio ρ y centro P , el cual es perpendicular a n .



Por el teorema de Stokes:

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\rho} \text{rot } X \cdot n dS = \int_{\partial S_\rho} X \cdot ds,$$

donde ∂S_ρ tiene la orientación inducida por n . No es difícil mostrar que existe un punto Q en S_ρ tal que

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } X \cdot n dS = [\text{rot } X(Q) \cdot n(Q)] A(S_\rho)$$

(éste es el teorema del valor medio para integrales). Entonces

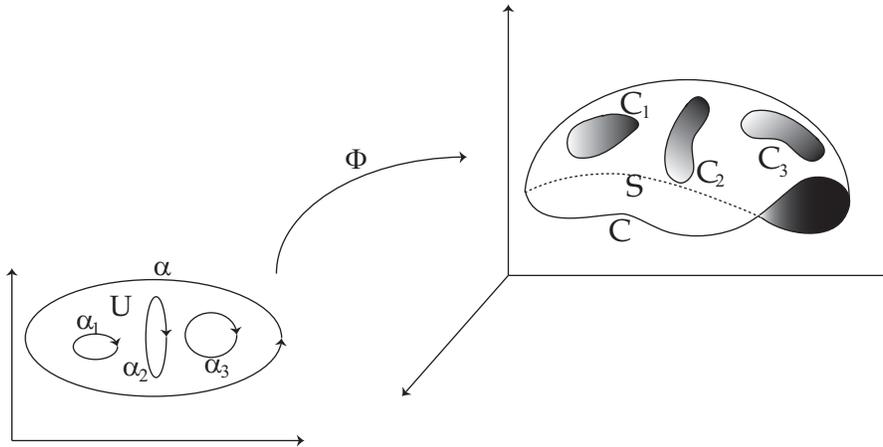
$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} X \cdot ds &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} X \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{rot} X(Q) \cdot n(Q) \\ &= \operatorname{rot} X(P) \cdot n(P). \end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$\operatorname{rot} X(P) \cdot n(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} X \cdot ds.$$

2.9.2. Aplicaciones del teorema de Stokes

El teorema de Stokes puede extenderse a regiones regulares simples más generales. Si U es una región múltiplemente conexa (con un número finito de agujeros) y $\Phi: U \rightarrow S$ es una parametrización. Entonces S tendrá la misma cantidad de agujeros.

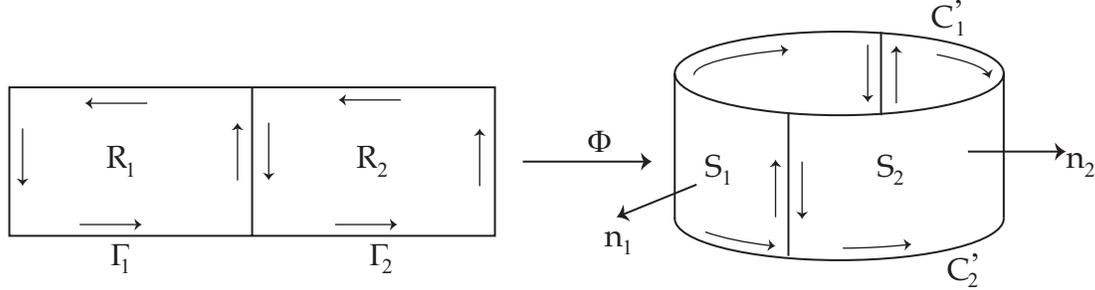


Siguiendo el mismo razonamiento usado en la demostración del teorema de Stokes, pero aplicando el teorema de Green generalizado, la suma de las integrales sobre las componentes frontera de la superficie con los signos adecuados (dependiendo de la orientación de la superficie), tomadas sobre las imágenes de las curvas que forman parte de la frontera de U coincide con la integral sobre la superficie del rotor del campo. Por ejemplo, si U tiene frontera como se muestra en la figura y las curvas se recorren en el sentido que se ilustra, donde la parametrización Φ es compatible con la orientación de S , la identidad del teorema de Stokes toma la forma

$$\iint_S \operatorname{rot} X \cdot d\mathbf{S} = \int_C X \cdot ds + \int_{C_1} X \cdot ds + \int_{C_2} X \cdot ds + \int_{C_3} X \cdot ds.$$

Consideremos superficies regulares no simples y veamos como aplicar el teorema de Stokes en ellas.

Consideremos primero el cilindro dibujado en la siguiente figura.



Es la reunión de dos superficies paramétricas regulares simples S_1 y S_2 imágenes de dos rectángulos adyacentes R_1 y R_2 a través de las aplicaciones Φ_1 y Φ_2 , respectivamente. Si γ_1 describe la frontera Γ_1 de R_1 positivamente orientada y γ_2 la frontera Γ_2 de R_2 también orientada positivamente, las funciones ρ_1 y ρ_2 definidas por

$$\rho_1(t) = \Phi_1(\gamma_1(t)), \quad \rho_2(t) = \Phi_2(\gamma_2(t)),$$

describen las imágenes C_1 y C_2 , de Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Si aplicamos el teorema de Stokes a S_1 y a S_2 y sumamos las dos identidades obtenemos:

$$\iint_{S_1} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_1} X \cdot ds + \int_{C_2} X \cdot ds. \quad (2.11)$$

Representemos con Φ la aplicación de $R_1 \cup R_2$ que coincide con Φ_1 en R_1 y con Φ_2 en R_2 . Por consiguiente, la suma de las integrales de superficie del primer miembro de 2.11 es igual a

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S}.$$

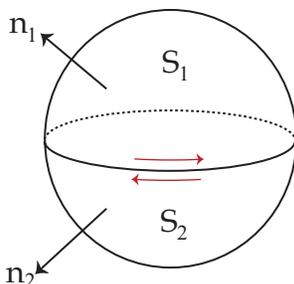
En este ejemplo, las representaciones Φ_1 y Φ_2 pueden elegirse de modo que ρ_1 y ρ_2 determinen direcciones opuestas en cada arco de la intersección $C_1 \cap C_2$, como indican las flechas en la figura. Las dos integrales de línea del segundo miembro de 2.11 pueden reemplazarse por una suma de integrales de línea a lo largo de las dos circunferencias C_1' y C_2' que forman el borde superior e inferior de $S_1 \cup S_2$, puesto que las integrales de línea a lo largo de cada arco de la intersección $C_1 \cap C_2$ se cancelan. Por lo tanto, la ecuación 2.11 puede escribirse como

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_1'} X \cdot ds + \int_{C_2'} X \cdot ds. \quad (2.12)$$

Las dos circunferencias C_1' y C_2' forman la frontera completa de $S_1 \cup S_2$. La ecuación 2.12 expresa la integral de superficie de $\text{rot } X$ sobre $S_1 \cup S_2$ como una integral de línea sobre

la frontera completa de $S_1 \cup S_2$. Esa ecuación es la extensión del teorema de Stokes a un cilindro.

Otra superficie orientable es la esfera dibujada en la siguiente figura.



Es la unión de dos superficies paramétricas simples (hemisferios) S_1 y S_2 , que pueden considerarse imágenes de un disco circular del plano xy a través de las aplicaciones Φ_1 y Φ_2 , respectivamente. Damos a Ψ , ρ_1 , ρ_2 , C_1 , C_2 con el mismo significado que en el ejemplo anterior. En este caso las curvas C_1 y C_2 están identificadas por la aplicación Φ (coinciden a lo largo del ecuador), y la superficie $S_1 \cup S_2$ se llama **cerrada**. Además, N_1 (orientación de S_1) y N_2 (orientación de S_2) pueden elegirse de modo que las direcciones determinadas por ρ_1 y ρ_2 sean opuestas en C_1 y C_2 , como se indica con flechas en la figura. (Esto ocurre porque $S_1 \cup S_2$ es orientable). Si aplicamos el teorema de Stokes a cada hemisferio y sumamos los resultados obtenemos la ecuación 2.11, como antes. Las normales N_1 y N_2 coinciden en la intersección $C_1 \cap C_2$, y podemos reunir las integrales sobre S_1 y S_2 en una sobre toda la esfera.

Las dos integrales de línea del segundo miembro de 2.11 se cancelan, y nos queda la fórmula

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

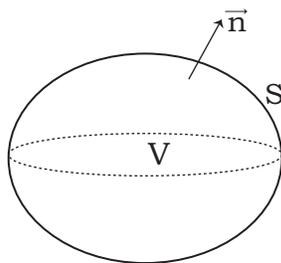
Este resultado es válido para toda superficie cerrada orientable.

2.10. Teorema de Gauss

El teorema de Stokes expresa una relación entre una integral extendida a una superficie y una integral de línea tomada sobre la curva o curvas que constituyen la frontera de tal superficie. El teorema de Gauss da una relación entre una integral triple extendida a un sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido. Este teorema asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie. Se trata de un resultado paralelo al teorema de Stokes y al de Green, en el sentido de que relaciona una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con una integral sobre una región contenida (superficie o volumen).

Teorema 2.10.1 (Teorema de la divergencia de Gauss). *Sea V un sólido en \mathbb{R}^3 limitado por una superficie orientable S con orientación dada por la normal unitaria \vec{n} exterior a*

S .



Si X es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto que contiene a $V \cup S$ entonces tenemos

$$\iiint_V \operatorname{div}(X) dV = \iint_S X \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.13)$$

Demostración. Bastará establecer las tres ecuaciones

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P n_1 dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q n_2 dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R n_3 dS.$$

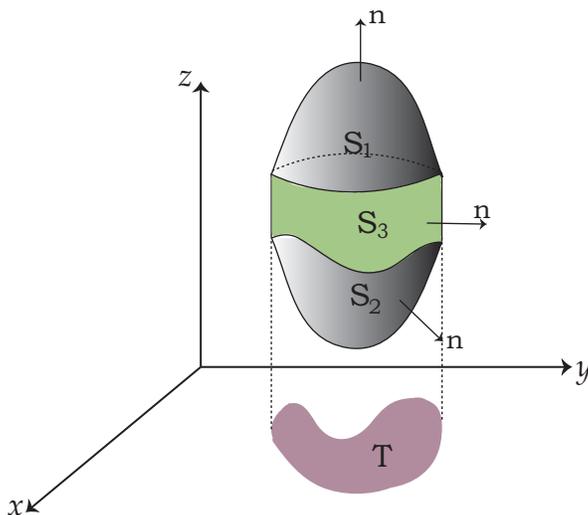
y sumar los resultados para obtener 2.13. Comenzamos por la tercera de esas fórmulas y la demostramos para sólidos de tipo especial.

Supongamos que V es un conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen una relación de la forma

$$g(x, y) \leq z \leq f(x, y) \quad \text{para } (x, y) \text{ en } T,$$

siendo T una región conexa del plano xy , f y g funciones continuas en T tales que $g(x, y) \leq f(x, y)$ para cada punto (x, y) en T . Geométricamente, esto significa que T es la proyección de V en el plano xy . Toda recta paralela al eje z que atravesase T corta al sólido V a lo largo de un segmento rectilíneo que une la superficie $z = g(x, y)$ a la $z = f(x, y)$. La superficie frontera S consta de un casquete superior S_1 , dado en la forma explícita $z = f(x, y)$, otro inferior S_2 dado por $z = g(x, y)$; y en algunos casos por una porción de cilindro S_3 generado por una recta que se mueve a lo largo de la frontera de T manteniéndose paralela al eje z . La normal exterior a S tiene componente z no negativa en S_1 y no positiva en S_2 y es paralela al plano xy en S_3 . Los sólidos de este tipo se llaman “proyectables- xy ”. (En

la siguiente figura se muestra un ejemplo.)



En él se incluyen todos los sólidos convexos (por ejemplo, esferas, elipsoides, cubos) y otros muchos que no son convexos (por ejemplo, el toro con eje paralelo al z). La idea de la demostración es sencilla. Expresamos la integral triple como una doble extendida a la proyección T . Entonces demostramos que esta integral doble tiene el mismo valor que la integral de superficie citada en el enunciado. Comencemos con la fórmula

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy.$$

La integral unidimensional respecto a z puede calcularse mediante el segundo teorema fundamental del cálculo, dándonos

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] dx dy.$$

Para la integral de superficie podemos escribir:

$$\iint_S R n_3 dS = \iint_{S_1} R n_3 dS + \iint_{S_2} R n_3 dS + \iint_{S_3} R n_3 dS$$

Sobre S_3 la normal n es paralela al plano xy , de modo que $n_3 = 0$ y la integral sobre S_3 es nula. Sobre la superficie S_1 usamos la parametrización

$$\Psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

y sobre S_2

$$\Psi(x, y) = (x, y, g(x, y)).$$

Entonces, como la normal a S_1 tiene la misma dirección que el vector unitario definido por la parametrización:

$$\iint_{S_1} Rn_3 dS = \iint_T R[x, y, f(x, y)] dx dy$$

Como en S_2 la normal es opuesta a la dirección definida por la parametrización se tiene que

$$\iint_{S_2} Rn_3 dS = - \iint_T R[x, y, g(x, y)] dx dy.$$

Por lo tanto

$$\iint_S Rn_3 dS = \iint_T (R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]) dx dy.$$

Lo cual termina de demostrar que

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S Rn_3 dS.$$

En la demostración anterior la hipótesis de que V es proyectable-xy nos permite expresar la integral triple extendida a V como una integral doble sobre su proyección T sobre el plano xy . Es evidente que si V es proyectable-yz podemos razonar del mismo modo y demostrar la identidad

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Qn_2 dS,$$

y si V es proyectable-xz obtenemos

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S Pn_1 dS.$$

Así vemos que el teorema de la divergencia es válido para todos los sólidos proyectables sobre los tres planos coordenados; en particular, para todo sólido convexo. \square

Ejemplo 2.10.1. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $X(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$. Se tiene:

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}(X) dV = \iiint_V (2 + 2y + 2z) dV.$$

Considerando coordenadas esféricas: $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \phi$ y recordando que el jacobiano es $-r^2 \sin \phi$ tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_S X \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + 2r \sin \theta \cos \phi + 2r \sin \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 \sin \theta \cos \phi \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &\quad + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 \sin^2 \phi dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.10.2. Usar el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) dS,$$

donde W es la bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Para poder aplicar el teorema de la divergencia de Gauss, debemos hallar algún campo vectorial

$$X = (P, Q, R)$$

en W con

$$X \cdot n = x^2 + y + z.$$

En cualquier punto $(x, y, z) \in \partial W$, la normal unitaria exterior n a ∂W es

$$n = (x, y, z)$$

pues en ∂W , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el radio vector $r = (x, y, z)$ es normal a la esfera ∂W . Por lo tanto, si X es el campo vectorial deseado, entonces

$$X \cdot n = Px + Qy + Rz.$$

Hacemos

$$Px = x^2, \quad Qy = y, \quad Rz = z$$

y resolvemos para P , Q y R para hallar que

$$X = (x, 1, 1).$$

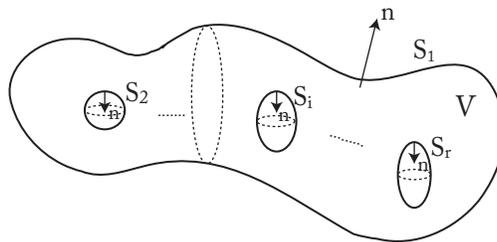
Calculando $\operatorname{div} X$ obtenemos

$$\operatorname{div} X = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Así, por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) dS = \iiint_W dV = V(W) = \frac{4}{3}\pi.$$

Al igual que en Green podemos probar la generalización del teorema de Gauss a volúmenes con más de una componente frontera. Si todas ellas tienen normal saliente al volumen, como se muestra en la siguiente figura



y $X : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1 entonces

$$\iiint_V \operatorname{div} X dV = \sum_{i=1}^r \iint_{S_i} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Donde V es el volumen comprendido entre las superficies S_1, S_2, \dots, S_r .

2.10.1. Ley de Gauss del electromagnetismo

Recordemos que el campo eléctrico generado por una carga viene dado por

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

La ley de Gauss afirma que el flujo de E a través de cualquier superficie cerrada que “encierre” a q es igual a $\frac{q}{\epsilon_0}$.

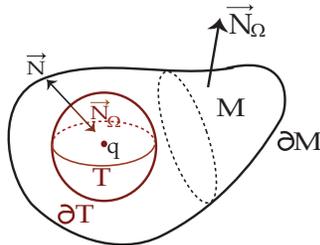
Para probar esta afirmación comencemos con probar que E es solenoidal ($\operatorname{div} E = 0$) en todo $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2), \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2), \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sean M y T como se muestra en la siguiente figura



Queremos probar que $\iint_{\partial M} E \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial T} E \cdot d\mathbf{S}$ Sea Ω la región entre M y T entonces Ω tiene frontera $\partial M \cup \partial T = S$. Pero la orientación en ∂T inducida por la normal exterior

en Ω es opuesta a la obtenida a partir de \vec{n} . Entonces aplicando el teorema de Gauss tenemos que

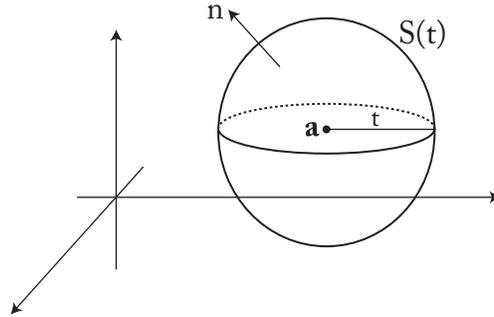
$$\iint_{\partial M} E \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\partial T} E \cdot d\mathbf{S} = \iint_S E \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} E dV = 0.$$

Entonces el flujo no depende de la superficie. Además, previamente hallamos que

$$\iint_{\partial T} E \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

2.10.2. Interpretación intrínseca de la divergencia

Sea $S(t)$ una esfera de radio $t > 0$ con centro en el punto \mathbf{a} de \mathbb{R}^3 , y representemos con $V(t)$ el volumen delimitado por $S(t)$. Consideremos X un campo vectorial de clase C^1 en $V(t)$.



Entonces tenemos

$$\operatorname{div} X(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(V(t))} \iint_{S(t)} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Veamos como se deduce esta igualdad.

Sea $f = \operatorname{div} X$. Si $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\left| f(\mathbf{a}) - \frac{1}{\operatorname{vol}(V(t))} \iint_{S(t)} X \cdot d\mathbf{S} \right| < \varepsilon \text{ si } 0 < t < \delta.$$

Puesto que f es continua en \mathbf{a} dado ε existe una esfera $B(\mathbf{a}, \delta)$ tal que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.

Por consiguiente, si escribimos $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})]$ e integramos ambos miembros de esta ecuación sobre la esfera $V(t)$ de radio $t < \varepsilon$, encontramos

$$f(\mathbf{a}) \operatorname{vol} V(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}) dx dy dz + \iiint_{V(t)} [f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})] dx dy dz.$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia a la primera integral triple del segundo miembro y pasamos este término al primer miembro, obtenemos la relación,

$$\left| f(\mathbf{a}) \operatorname{vol} V(t) - \iint_{S(t)} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} \right| \leq \iiint_{V(t)} |f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})| dx dy dz \leq \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{vol} V(t) < \varepsilon \operatorname{vol} V(t).$$

Cuando dividimos esta desigualdad por $\operatorname{vol} V(t)$ vemos que la igualdad que queríamos es cierta.

En la demostración anterior no hacemos uso especial del hecho de que $V(t)$ fuese una esfera. El mismo teorema subsiste si, en lugar de esferas, utilizamos cualquier conjunto de sólidos $V(t)$ para los que el teorema de la divergencia es válido, con tal que esos sólidos tiendan hacia \mathbf{a} cuando $t \rightarrow 0$. Por ejemplo, cada $V(t)$ podría ser un cubo inscrito en una esfera de radio t en torno de \mathbf{a} ; se aplicaría exactamente la misma demostración.

De estos dos resultados deducimos la ley de Gauss.

Capítulo 3

Formas diferenciales

La teoría de las formas diferenciales proporciona una manera conveniente y elegante de expresar los teoremas de Green, Stokes y Gauss. De hecho, el uso de formas diferenciales muestra que todos estos teoremas son manifestaciones de una sola teoría matemática subyacente y proporciona el lenguaje necesario para generalizarlos a cualquier dimensión. Como nuestro objetivo principal es mostrar que los teoremas de Green, Stokes y Gauss se pueden unificar bajo un solo teorema introduciremos formas de manera puramente axiomática y no constructiva, evadiendo así la tremenda cantidad de preliminares algebraicos formales que por lo general se requieren para su construcción.

Comenzaremos introduciendo el concepto de 0-forma.

Definición 3.0.1. Sea U un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 . Una **0-forma** en U es una función con valores reales $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ suave ($C^\infty(U)$).

Dadas dos 0-formas f y g en U , podemos sumarlas de la manera usual para obtener una nueva 0-forma $f + g$, o multiplicarlas para obtener la 0-forma $f.g$.

Ejemplo 3.0.1. Sean $f(x, y, z) = xy + yz$ y $g(x, y, z) = y \sin xz$ dos 0-formas en \mathbb{R}^3 . Entonces

$$(f + g)(x, y, z) = xy + yz + y \sin xz$$

y

$$(f.g)(x, y, z) = y^2x \sin xz + y^2z \sin xz.$$

Definición 3.0.2. Las **1-formas básicas** son las expresiones dx , dy y dz . En este momento las consideramos sólo símbolos formales. Una **1-forma** ω en un conjunto abierto U es una combinación lineal formal

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

o simplemente

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

donde P , Q y R son funciones suaves con valores reales, definidas en U . Por la expresión Pdx entendemos la 1-forma $Pdx + 0dy + 0dz$ y de manera similar para Qdy y Rdz . Además el orden de Pdx , Qdy y Rdz no tiene importancia, de modo que

$$Pdx + Qdy + Rdz = Rdz + Pdx + Qdy, \text{ etc.}$$

Dadas dos 1-formas $\omega_1 = P_1dx + Q_1dy + R_1dz$ y $\omega_2 = P_2dx + Q_2dy + R_2dz$, podemos sumarlas para obtener una nueva 1-forma $\omega_1 + \omega_2$, definida por

$$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2)dx + (Q_1 + Q_2)dy + (R_1 + R_2)dz,$$

y dada una 0-forma f , podemos formar la 1-forma $f\omega_1$ definida por

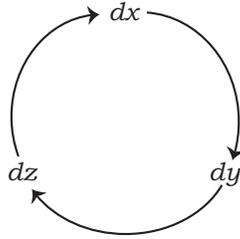
$$f\omega_1 = (fP_1)dx + f(Q_1)dy + (fR_1)dz.$$

Ejemplo 3.0.2. Sean $\omega_1 = (x + y^2)dx + zydy + e^{xyz}dz$ y $\omega_2 = \sin ydx + \sin xdy$ 1-formas. Entonces

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \sin y)dx + (zy + \sin x)dy + e^{xyz}dz.$$

Si $f(x, y, z) = x$, entonces

$$f\omega_2 = x \sin ydx + x \sin xdy.$$



Definición 3.0.3. Las **2-formas básicas** son las expresiones formales $dx dy$, $dy dz$ y $dz dx$. Estas expresiones deben pensarse como los productos de dx y dy , dy y dz , y dz y dx . Una **2-forma** η en U es una expresión formal

$$\eta = Fdx dy + Gdy dz + Hdz dx,$$

donde F , G y H son funciones suaves reales definidas en U . El orden de $Fdx dy$, $Gdy dz$ y $Hdz dx$ no es importante; por ejemplo,

$$Fdx dy + Gdy dz + Hdz dx = Hdz dx + Fdx dy + Gdy dz, \text{ etc.}$$

En este punto es útil notar que en una 2-forma, las 1-formas básicas dx , dy y dz siempre aparecen en pares cíclicos (ver la figura), esto es, $dx dy$, $dy dz$ y $dz dx$. Por analogía con las 0-formas y las 1-formas, podemos sumar dos 2-formas

$$\eta_i = F_i dx dy + G_i dy dz + H_i dz dx,$$

$i = 1, 2$, para obtener una nueva 2-forma,

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2)dxdy + (G_1 + G_2)dydz + (H_1 + H_2)dzdx.$$

De manera análoga, si f es una 0-forma y si η es una 2-forma, podemos tomar el producto

$$f\eta = (fF)dxdy + (fG)dydz + (fH)dzdx.$$

Finalmente, por la expresión $Fdxdy$ entenderemos la 2-forma $Fdxdy + 0dydz + 0dzdx$.

Ejemplo 3.0.3. Si $\eta_1 = x^2dxdy + y^3xdydz + \sin zydzdx$ y $\eta_2 = ydydz$. Entonces

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2dxdy + (y^3x + y)dydz + \sin zydzdx.$$

Si $f(x, y, z) = xy$, entonces

$$f\eta_2 = xy^2dydz.$$

Definición 3.0.4. Una **3-forma básica** es una expresión formal $dxdydz$ (en orden cíclico). Una **3-forma** ν en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ es una expresión de la forma $\nu = f(x, y, z)dxdydz$, donde f es una función con valores reales definida en U .

Podemos sumar dos 3-formas y multiplicarlas por 0-formas de la manera obvia. Sean $\nu_1 = f_1dxdydz$ y $\nu_2 = f_2dxdydz$, entonces

$$\nu_1 + \nu_2 = (f_1 + f_2)dxdydz.$$

Si $\nu = fdxdydz$ y g una-forma, entonces

$$g\nu = gfdxdydz.$$

Ejemplo 3.0.4. Sean $\nu_1 = ydxdydz$ y $\nu_2 = e^{x^2}dxdydz$, entonces

$$\nu_1 + \nu_2 = (y + e^{x^2})dxdydz.$$

Si $f(x, y, z) = xyz$, entonces

$$f\nu_1 = xy^2zdxdydz.$$

Notación: $\Omega^k(U)$ es el conjunto de k -formas definidas en el abierto U . Con las operaciones vistas anteriormente podemos probar que este conjunto tiene estructura de espacio vectorial sobre los reales, donde pensamos a los escalares como funciones constantes.

Ahora que hemos definido estos objetos formales (formas), resulta válido preguntarnos para qué sirven, cómo se usan y, quizá lo más importante, qué significan. Veamos como usarlas e interpretarlas.

Una función con valores reales definida en un dominio U en \mathbb{R}^3 es una regla que asigna a cada punto en U un número real. Las formas diferenciales son, en cierto sentido, generalizaciones de las funciones con valores reales que hemos estudiado en cálculo. De hecho, las 0-formas en un conjunto abierto U son simplemente funciones en U . Así, una 0-forma f manda puntos de U a números reales. Preferimos interpretar las k -formas diferenciales

(para $k \geq 1$), no como funciones definidas en puntos de U , sino como funciones definidas en objetos geométricos tales como curvas y superficies. Muchos de los antiguos geómetras griegos consideraron a las rectas y curvas formadas por infinidad de puntos, y a los planos y superficies formados por infinidad de curvas. En consecuencia hay al menos cierta justificación histórica para aplicar esta jerarquía geométrica a la interpretación de las formas diferenciales. Dado un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, distinguiremos cuatro tipos de subconjuntos de U :

- (i) puntos en U ,
- (ii) curvas simples orientadas y curvas cerradas simples orientadas en U ,
- (iii) superficies orientadas $S \subset U$
- (iv) subregiones elementales de U .

3.1. Integrales de formas

3.1.1. Integrales de 1-formas

Definición 3.1.1. Sea $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ una 1-forma en U y sea C una curva orientada simple en U . Entonces, definimos la **integral de ω sobre C** como

$$\int_C \omega = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Ejemplo 3.1.1. Sea $\omega = xydx + y^2dy + dz$ y C la curva parametrizada por $(t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$. Hallar $\int_C \omega$.

$$\int_C \omega = \int_0^1 (t^5 2t + t^6 3t^2) dt = \frac{13}{21}.$$

Así es que podemos pensar que una 1-forma ω asigna a cada curva simple orientada y a cada curva cerrada simple orientada C en \mathbb{R}^3 el número

$$\int_C \omega.$$

3.1.2. Integrales de 2-formas

Una 2-forma η en un conjunto abierto U en \mathbb{R}^3 se puede interpretar de manera análoga como una función que asocia con cada superficie orientada $S \subset U$ un número real. Esto se logra por medio del concepto de integración de 2-formas sobre superficies.

Definición 3.1.2. Sea $\eta = Fdx dy + Gdy dz + Hdz dx$ una 2-forma y S superficie parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces definimos la **integral de la 2-forma η sobre S**

como:

$$\begin{aligned}\int_S \eta &= \int_S F dx dy + G dy dz + H dz dx \\ &= \iint_S (G, H, F) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_D F \frac{(X, Y)}{(u, v)} + G \frac{(Y, Z)}{(u, v)} + H \frac{(Z, X)}{(u, v)} du dv\end{aligned}$$

Si S está compuesta por varias superficies paramétricas S_i , $i = 1, \dots, k$, cada una de ellas con parametrización Φ_i , definimos

$$\int_S \eta = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \eta.$$

Ejemplo 3.1.2. Consideremos la 2-forma $\eta = z^2 dx dy$ y la superficie S semiesfera superior de radio 1 en \mathbb{R}^3 . Hallar $\iint_S \eta$.

Sea $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, con $(u, v) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ una parametrización de S . Entonces

$$\int_S \eta = \iint_D \cos^2 u \frac{(X, Y)}{(u, v)} du dv = \iint_D \cos^3 u \sin u du dv = -2\pi \frac{\cos^4 u}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 3.1.3. Hallar $\int_S x dy dz + y dx dy$, donde S es la superficie orientada descrita por la parametrización $x = u + v$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ donde $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Por definición tenemos que

$$\frac{(Y, Z)}{(u, v)} = 2(u^2 + v^2)$$

$$\frac{(X, Y)}{(u, v)} = -2(u + v)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int_S x dy dz + y dx dy &= \iint_D 2(u + v)(u^2 + v^2) - 2(u^2 - v^2)(u + v) du dv \\ &= 4 \iint_D (v^3 + uv^2) du dv = 4 \int_0^1 \int_0^1 (v^3 + uv^2) du dv \\ &= 4 \int_0^1 \left[uv^3 + \frac{u^2 v^2}{2} \right]_0^1 dv = 4 \int_0^1 \left(v^3 + \frac{v^2}{2} \right) dv \\ &= \left[v^4 + \frac{2v^3}{3} \right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

3.1.3. Integrales de 3-formas

Finalmente podemos interpretar a las 3-formas como funciones en la regiones elementales de U .

Definición 3.1.3. Sea $\nu = f(x, y, z)dxdydz$ una 3-forma y sea R una región elemental en U . Entonces, definimos la **integral de η sobre R** como

$$\int_R \eta = \iiint_R f(x, y, z)dxdydz.$$

Que es simplemente la integral triple ordinaria de f sobre R .

Ejemplo 3.1.4. Sea $\eta = (x + z)dxdydz$ y $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, calcular $\int_R \eta$.

$$\begin{aligned} \int_R \eta &= \iiint_R (x + z)dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + z)dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + zx \right] dydz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z \right) dydz = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z \right) dz \\ &= \left[\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

3.2. Producto exterior

Estudiaremos ahora el álgebra (o reglas de multiplicación) de formas, que, junto con la diferenciación de formas, nos permitirán enunciar los teoremas de Green, Stokes y Gauss en términos de formas diferenciales.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) & \xrightarrow{\wedge} & \Omega^{k+l}(U) \\ (\omega, \eta) & \mapsto & \omega \wedge \eta \end{array}$$

Si ω es una k -forma y η es una l -forma en U , $0 \leq k+l \leq 3$, existe un producto llamado **producto exterior** $\omega \wedge \eta$ que es una $k+l$ -forma en U . El producto exterior satisface las leyes siguientes:

(i) Para cada k existe una k -forma 0 , cero, con la propiedad de que $0 + \omega = \omega$ para toda k -forma ω y $0 \wedge \eta = 0$ para toda l -forma η si $0 \leq k+l \leq 3$.

(ii) (*Distributividad*) Si f es una 0-forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta).$$

(iii) (*Anticonmutatividad*) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$.

(iv) (*Asociatividad*) Si ω_1, ω_2 y ω_3 son k_1, k_2 y k_3 formas, respectivamente, con $k_1 + k_2 + k_3 \leq 3$, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

(v) (Homogeneidad respecto a funciones) Si f es una 0-forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta).$$

Nótese que las reglas (ii) y (iii) en realidad implican la regla (v).

(vi) Se cumplen las siguientes reglas de multiplicación para 1-formas:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= dx dy, \\ dy \wedge dx &= -dx dy = (-1)(dx \wedge dy), \\ dy \wedge dz &= dy dz = (-1)(dx \wedge dy), \\ dz \wedge dx &= dz dx = (-1)(dx \wedge dz), \end{aligned}$$

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz.$$

(vii) Si f es una 0-forma y ω es cualquier k -forma, entonces $f \wedge \omega = f\omega$.

Usando las leyes (i) a la (vii), podemos hallar ahora un producto único de cualquier l -forma η y cualquier k -forma ω , si $0 \leq k + l \leq 3$.

Ejemplo 3.2.1. Mostrar que $dx \wedge dy dz = dx dy dz$.

Por la regla (vi) tenemos que $dy dz = dy \wedge dz$. Por lo tanto

$$dx \wedge dy dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx dy dz.$$

Ejemplo 3.2.2. Sean dx, dy, dz las 1-formas básicas de \mathbb{R}^3 . Entonces:

$$\begin{aligned} (x dx + y^2 dy) \wedge (dx + x dy) &= x dx \wedge dx + x^2 dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dx + xy^2 dy \wedge dy \\ &= (x^2 - y^2) dx \wedge dy \\ &= (x^2 - y^2) dx dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dx + dy + dz) \wedge (x dx + z dy) &= x dx \wedge dx + z dx \wedge dy + x dy \wedge dx \\ &\quad + z dy \wedge dy + x dz \wedge dx + z dz \wedge dy \\ &= (z - x) dx \wedge dy + x dz \wedge dx + z dz \wedge dy \\ &= (z - x) dx dy + x dz dx - z dy dz. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3. Si $\omega = xdx + ydy$ y $\eta = zydx + xzdy + xydz$, hallar $\omega \wedge \eta$.

$$\begin{aligned}
 \omega \wedge \eta &= (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz) \\
 &= [(xdx + ydy) \wedge (zydx)] + [(xdx + ydy) \wedge (xzdy)] \\
 &\quad + [(xdx + ydy) \wedge (xydz)] \\
 &= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) \\
 &\quad + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\
 &= -zy^2dxdy + x^2zdxdy - x^2ydzdx + xy^2dydz \\
 &= (x^2z - y^2z)dxdy - x^2ydzdx + xy^2dydz.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.4. Si $\omega = xdx - ydy$ y $\eta = xdydz + zdx dy$, hallar $\omega \wedge \eta$.

$$\begin{aligned}
 \omega \wedge \eta &= (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdx dy) \\
 &= [(xdx - ydy) \wedge (xdydz)] + [(xdx - ydy) \wedge (zdx dy)] \\
 &= (x^2dx \wedge dydz) - (zydy \wedge dydz) + (xzdx \wedge dx dy) - (yzdy \wedge dx dy) \\
 &= [x^2dx \wedge (dy \wedge dy)] - [yzdy \wedge (dy \wedge dz)] \\
 &\quad + [xzdx \wedge (dx \wedge dy)] - [yzdy \wedge (dx \wedge dz)] \\
 &= x^2dxdydz - [xy(dy \wedge dy) \wedge dz] \\
 &\quad + [xz(dx \wedge dx) \wedge dy] - [yz(dy \wedge dx) \wedge dy] \\
 &= x^2dxdydz - xy(0 \wedge dz) + xz(0 \wedge dy) + [yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\
 &= x^2dxdydz.
 \end{aligned}$$

3.3. Derivada exterior

El último paso importante en el desarrollo de esta teoría es mostrar cómo diferenciar formas. La derivada de una k -forma es una $(k + 1)$ -forma si $k < 3$ y la derivada de una 3-forma siempre es cero.

Definición 3.3.1.

$$d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$$

Si ω es una k -forma, denotaremos la **derivada (exterior)** de ω por $d\omega$. La operación d tiene las propiedades siguientes:

1. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una 0-forma, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

2. (Linealidad) Si ω_1 y ω_2 son k -formas, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

3. Si ω es una k -forma y η es una l -forma,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta).$$

4. $d(d\omega) = 0$ y $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, o simplemente $d^2 = 0$.

Las propiedades (1) a (4) proporcionan información suficiente para permitirnos diferenciar de manera única cualquier forma.

Ejemplo 3.3.1. Sea $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$ una 1-forma en algún conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Hallar $d\omega$.

$$\begin{aligned} & d[P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy] \\ = & d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] && \text{(usando 2)} \\ = & (dP \wedge dx) + [P \wedge d(dx)] + (dQ \wedge dy) + [Q \wedge d(dy)] && \text{(usando 3)} \\ = & (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) && \text{(usando 4)} \\ = & \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy && \text{(usando 1)} \\ = & \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \right) \\ = & -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \\ = & \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.2. Si $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ una 1-forma en algún conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. Hallar $d\omega$.

$$\begin{aligned}
& d[P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] \\
&= d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] + d[R(x, y, z) \wedge dz] \\
&= (dP \wedge dx) + [P \wedge d(dx)] + (dQ \wedge dy) + [Q \wedge d(dy)] + (dR \wedge dz) + [R \wedge d(dz)] \\
&= (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) + (dR \wedge dz) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dz \right) \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy dz \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.3. Sea f una 0-forma. Usando sólo las reglas de diferenciación (1) a (3) y el hecho de que $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, mostrar que $d(df) = 0$.

Por la regla (1):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

de modo que

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right).$$

Trabajando sólo con el primer término, usando la regla (3), obtenemos

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x} \wedge d(dx) \\
 &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx + 0 \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz \wedge dx \\
 &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx.
 \end{aligned}$$

De manera análoga hallamos que

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dy dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dz dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Al sumarlos obtenemos $d(df) = 0$ por la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

Ejemplo 3.3.4. Mostrar que $d(dx dy)$, $d(dy dz)$ y $d(dz dx)$ son cero.

Para probar el primer caso, usamos la propiedad (3):

$$d(dx dy) = d(dx \wedge dy) = d(dx) \wedge dy - dx \wedge d(dy) = 0.$$

Los otros casos son similares.

Ejemplo 3.3.5. Si $\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$, hallar $d\eta$.

Por la propiedad (2) $d\eta = d(F dx dy) + d(G dy dz) + d(H dz dx)$. Calcularemos $d(F dx dy)$. Usando de nuevo la propiedad (3), obtenemos

$$d(F dx dy) = d(F \wedge dx dy) = dF \wedge (dx dy) + F \wedge d(dx dy) = dF \wedge (dx dy).$$

$$\begin{aligned}
 dF \wedge (dx dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz\right) \wedge (dx \wedge dy) \\
 &= \left[\frac{\partial F}{\partial x} dx \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y} dy \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge (dx \wedge dy)\right]
 \end{aligned}$$

Observar que

$$\begin{aligned}
 dx \wedge (dx \wedge dy) &= (dx \wedge dx) \wedge dy = 0 \wedge dy = 0 \\
 dy \wedge (dx \wedge dy) &= -dy \wedge (dy \wedge dx) \\
 &= -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0 \wedge dx = 0 \\
 dz \wedge (dx \wedge dy) &= (-1)^2 (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(Fdxdy) = \frac{\partial F}{\partial z} dx dy dz.$$

De manera análoga, hallamos que

$$d(Gdydz) = \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz, \quad d(Hdzdx) = \frac{\partial H}{\partial y} dx dy dz.$$

Por lo tanto

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy dz.$$

3.4. Campos en \mathbb{R}^3

Un **campo** (diferenciable) en un abierto U de \mathbb{R}^3 es una función $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con P, Q, R de clase C^∞ . Llamaremos $\chi(U)$ al conjunto de los campos en U .

Recordar que tenemos las siguientes operaciones entre campos. Si $F, G \in \chi(U)$, definimos $F + G, fG \in \chi(U)$ mediante

$$(F + G)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}), \quad (fG)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})G(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

Estas operaciones en $\chi(U)$ verifican las mismas propiedades de los espacios vectoriales y $\chi(U)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial de la misma forma que lo es $\Omega^k(U)$.

- Si $f \in C^\infty(U)$, se define su **gradiente** $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \in \chi(U)$.
- Si $F \in \chi(U)$, se define su **rotacional** $\text{rot } F = \nabla \wedge F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \in \chi(U)$.
- Si $F \in \chi(U)$, se define su **divergencia** $\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \in C^\infty(U)$.

Podemos definir los siguientes operadores

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{\nabla} & \chi(U) \\ f & \mapsto & \nabla f \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \chi(U) \\ F & \mapsto & \nabla \wedge F \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \\ F & \mapsto & \nabla \cdot F \end{array}$$

Tenemos formas naturales de ir del espacio de campos al espacio de formas. A continuación presentaremos los mapas que permiten hacer esta asociación. Recordar que notábamos a los campos como $F = (P, Q, R) \in \chi(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\omega_1^0} & \Omega^1(U) \\ F & \mapsto & \omega_1^F = Pdx + Qdy + Rdz \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\omega_2^0} & \Omega^2(U) \\ F & \mapsto & \omega_2^F = Rdx dy + Pdy dz + Qdz dx \end{array},$$

y

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{\omega_3^0} & \Omega^3(U) \\ f & \mapsto & \omega_3^f = f dx dy dz. \end{array}$$

Estos mapas son isomorfismos lineales, con las estructuras de \mathbb{R} -espacios vectoriales dadas anteriormente.

Teorema 3.4.1. *Si consideramos los siguientes mapas*

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{\nabla} & \chi(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \chi(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \omega_1^{()} & & \downarrow \omega_2^{()} & & \downarrow \omega_3^{()} \\ \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U) \end{array}$$

Entonces, para todo $f \in C^\infty(U)$ y $F \in \chi(U)$ se verifica

$$df = \omega_1^{\nabla} f = df, \quad d(\omega_1^F) = \omega_2^{\text{rot} F}, \quad d(\omega_2^F) = \omega_3^{\text{div} F}.$$

Corolario 3.4.2. *Usando que $d^2 = 0$ y el teorema anterior concluimos que $\text{rot}(\nabla f) = 0$ y $\text{div}(\text{rot} F) = 0$.*

3.5. Formas cerradas versus formas exactas

Definición 3.5.1. Una k -forma ω se dice **cerrada** si $d\omega = 0$ y se dice **exacta** si existe una $(k-1)$ -forma η tal que $d\eta = \omega$.

Notación: Sea $Z^k(U) = \{\omega \in \Omega^k(U) : d\omega = 0\}$ y $B^k(U) = \{\omega \in \Omega^k(U) : \exists \eta \in \Omega^{k-1}(U) \text{ con } d\eta = \omega\}$.

Observación 3.5.2. $B^k(U) \subset Z^k(U)$.

Sea $\omega \in B^k(U)$, entonces, existe $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $d\eta = \omega$. Por lo tanto, $d\omega = d(d\eta) = 0$. Entonces $\omega \in Z^k(U)$.

Corolario 3.5.3. *Si $\omega \in \Omega^1(U)$ entonces, por el teorema previo existe $F \in \chi(U)$ tal que $\omega = \omega_1^F$. Si ω es cerrada entonces $0 = d\omega = d(\omega_1^F) = \omega_2^{\text{rot} F}$. Usando que $\omega_2^{()}$ es un isomorfismo tenemos que $\text{rot} F = 0$. Entonces F es irrotacional.*

De igual forma, si $\omega \in \Omega^2(U)$, entonces $\omega = \omega_2^F$ y si esta forma es cerrada tenemos que $0 = d\omega = d(\omega_2^F) = \omega_3^{\text{div} F}$. Entonces $\text{div} F = 0$, es decir, que F es solenoidal.

Corolario 3.5.4. *Veamos que podemos decir de los campos asociados si las formas son exactas. Si $\omega \in \Omega^1(U)$ entonces, $\omega = \omega_1^F$. Además, por ser exacta existe $f \in \Omega^0(U)$ tal que $df = \omega$. Entonces $\omega_1^F = \omega = df = \omega_1^{\nabla} f$, de lo cual deducimos que $F = \nabla f$, es decir, F admite un potencial escalar y es conservativo.*

Si ahora $\omega \in \Omega^2(U)$ entonces, $\omega = \omega_2^F$ y existe $\eta \in \Omega^1(U)$ tal que $d\eta = \omega$. Luego, aplicando el teorema previo, $\omega_2^{\text{rot} G} = d(\omega_1^G) = d\eta = \omega = \omega_2^F$. Entonces, $F = \text{rot} G$, de lo cual concluimos que F admite un potencial vectorial.

Vimos anteriormente que toda forma exacta es cerrada, ahora estudiaremos bajo qué condiciones se cumple el recíproco también, es decir, bajo qué condiciones las formas exactas coinciden con las formas cerradas. Este problema es importante porque es mucho más fácil verificar que una forma es cerrada a que es exacta.

Ejemplo 3.5.1. Sea $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 1)\}$ y $\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \in \Omega^1(U)$.

ω es cerrada porque $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \subset U$.

Afirmación: ω es exacta en V . Sea $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x, y) = \arctan(y/x)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Entonces $\omega = dg$.

Afirmación: ω no es exacta en U

Supongamos que existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$. Como $V \subset U$ es $\omega = df$ en V , luego $df = dg$ en V , es decir $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ en V .

Sean $V_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ y $V_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ las componentes conexas de V . Entonces, existen constantes c_1, c_2 tales que $f = g + c_2$ en V_+ y $f = g + c_1$ en V_- . Sea $p = (0, b)$, $b > 0$.

$$f(0, b) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, b) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(b/x) + c_2 = \frac{\pi}{2} + c_2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, b) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(b/x) + c_1 = -\frac{\pi}{2} + c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + c_2 = -\frac{\pi}{2} + c_1 \Rightarrow c_2 = c_1 - \pi.$$

Sea $p = (0, c)$, $c < 0$

$$f(0, c) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, c) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(c/x) + c_2 = -\frac{\pi}{2} + c_2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, c) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(c/x) + c_1 = \frac{\pi}{2} + c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + c_2 = \frac{\pi}{2} + c_1 \Rightarrow c_2 = c_1 + \pi.$$

De estas dos igualdades llegamos a una contradicción. Entonces no existe f en U : $df = \omega$.

De lo anterior se deduce que para estudiar el problema de cuándo una forma cerrada es exacta importa el dominio de la forma.

Definición 3.5.5. Un subconjunto U de \mathbb{R}^n tiene forma de **estrella** si existe un punto $p_0 \in U$ tal que para todo $p \in U$ se cumple $\{tp + (1-t)p_0 : t \in [0, 1]\} \subset U$.

Ejemplo 3.5.2. 1. Todo subconjunto convexo de \mathbb{R}^n tiene forma de estrella. En particular el propio \mathbb{R}^n tiene forma de estrella.

2. $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$ tiene forma de estrella (y no es convexo).

Teorema 3.5.6 (Lema de Poincaré). *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto con forma de estrella, entonces para todo $k = \{0, \dots, n\}$ se cumple que toda k -forma cerrada en U es exacta.*

Demostración. Para simplificar la notación haremos la prueba para 1-formas en $U \subset \mathbb{R}^3$ con forma de estrella respecto al origen $(0, 0, 0)$.

Sea $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \in \Omega^1(U)$: $d\omega = 0$, entonces $Q_x = P_y$, $P_z = R_x$, $R_y = Q_z$. Como U tiene forma de estrella respecto al origen, tiene sentido definir $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(X) = \int_0^1 xP(tX) + yQ(tX) + zR(tX)dt, \quad \forall X = (x, y, z) \in U.$$

Calculando obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(X) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 xP(tX) + yQ(tX) + zR(tX)dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (xP(tX) + yQ(tX) + zR(tX)) dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + x \frac{\partial}{\partial x} (P(tX)) + y \frac{\partial}{\partial x} (Q(tX)) + z \frac{\partial}{\partial x} (R(tX)) dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + x \frac{\partial P}{\partial x}(tX)t + y \frac{\partial Q}{\partial x}(tX)t + z \frac{\partial R}{\partial x}(tX)t dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + x \frac{\partial P}{\partial x}(tX)t + y \frac{\partial P}{\partial y}(tX)t + z \frac{\partial P}{\partial z}(tX)t dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + \frac{d}{dt} (P(tX))t dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (P(tX)t) dt \\ &= P(tX)t \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= P(X). \end{aligned}$$

Luego, $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, y análogamente se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = R$, es decir $df = \omega$.

Entonces $Z^k(U) = B^k(U)$ si U tiene forma de estrella. \square

3.6. Teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de formas

Teorema 3.6.1 (TEOREMA DE GREEN). *Sea D una región elemental en el plano xy , con ∂D con orientación anihoraria. Supongamos que $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es una 1-forma en algún conjunto abierto U en \mathbb{R}^3 que contenga a D . Entonces*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Notar que $d\omega$ es una 2-forma en U y D es, de hecho, una superficie en \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$. Como P y Q no son, explícitamente, funciones de z , tenemos que $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ y $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ por lo tanto $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy$. En consecuencia, el teorema dice nada más que

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy,$$

que es precisamente el teorema de Green presentado en el capítulo anterior. Entonces se cumple este teorema. Asimismo, tenemos los siguientes teoremas.

Teorema 3.6.2 (TEOREMA DE STOKES). *Sea S una superficie orientada en \mathbb{R}^3 con una frontera formada por una curva cerrada simple orientada de forma coherente con S . Supongamos que ω es una 1-forma en algún conjunto abierto U que contiene a S . Entonces*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

Teorema 3.6.3 (TEOREMA DE GAUSS). *Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ una región elemental con ∂V con la orientación exterior. Si η es una 2-forma en alguna región U que contiene a V , entonces*

$$\int_{\partial V} \eta = \int_V d\eta.$$

Es clara la analogía en los enunciados de estos teoremas. En las formulaciones para campos vectoriales hemos usado divergencia para regiones en \mathbb{R}^3 (en el teorema de Gauss), rotacional para superficies en \mathbb{R}^3 (en el teorema de Stokes y regiones en \mathbb{R}^2 (en el teorema de Green). Aquí usamos sólo el concepto unificado de derivada de una forma diferencial para los tres teoremas. De hecho, podemos enunciar todos los teoremas como uno, si introducimos un poco más de terminología.

Por una 2-variedad orientada con frontera en \mathbb{R}^3 entenderemos una superficie en \mathbb{R}^3 cuya frontera es una curva cerrada simple con una orientación inducida por la superficie. Por una 3-variedad orientada con frontera en \mathbb{R}^3 entenderemos una región elemental en \mathbb{R}^3 (suponemos que su frontera, que es una superficie, está dotada con la orientación exterior). Al siguiente teorema unificado le llamamos "teorema de Stokes", de acuerdo con las convenciones vigentes.

Teorema 3.6.4 (TEOREMA GENERAL DE STOKES). *Sea M una k -variedad en \mathbb{R}^3 ($k = 2$ o 3) contenida en algún conjunto abierto U . Supongamos que ω es una $(k-1)$ -forma en U . Entonces*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$