

PRÁCTICO 8

§1. Se definen las siguientes funciones:

- $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (seno hiperbólico).
- $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (coseno hiperbólico).
- $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ (tangente hiperbólica).
- $\text{sech} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{sech}(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$ (secante hiperbólica).

- (a) Demostrar que: $(\text{sh } x)' = \text{ch } x$, $(\text{ch } x)' = \text{sh } x$ y $(\text{th } x)' = 1 - \text{th}^2(x)$.
- (b) Demostrar que: $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, $1 - \text{th}^2(x) = \text{sech}^2(x)$, $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)$ y $\text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x)$. Comparar los resultados obtenidos con sus equivalentes para funciones trigonométricas.
- (c) Bosquejar los gráficos de las funciones $\text{sh } x$, $\text{ch } x$ y $\text{th } x$. Investigar en qué dominios son invertibles. Notaremos sus inversas como argsh , argch y argth respectivamente.

§2. (a) Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función invertible y derivable. Si $y \in (a, b)$, probar que $(f^{-1})'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}$.

- (b) Usando la expresión de $(f^{-1})'$, calcular:
- (i) $(\text{arctg}(x))'$ (ii) $(\text{arcsen}(x))'$ (iii) $(\text{arccos}(x))'$
(iv) $(\text{argth}(x))'$ (v) $(\text{argsh}(x))'$ (vi) $(\text{argch}(x))'$.

- (c) Dar una fórmula explícita para $\text{argsh}(x)$, y a partir de ella calcular $(\text{argsh}(x))'$. (Sugerencia: en la fórmula de $\text{sh}(x)$, hacer el cambio de variable $u = e^x$.)

§3. Acotar el error absoluto en las fórmulas de aproximación siguientes:

- (i) $e^x \approx \sum_{j=0}^5 \frac{x^j}{j!}$, $x \in [0, 1]$. (ii) $\text{sen } x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

- (iii) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $x \in [0, 1]$ (iv) ¿Para cuáles valores de x es válida la fórmula de aproximación $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ con una exactitud de 0,0001?

§4. Calcular $\sqrt[3]{7}$ con un error menor que 0,01 por medio del desarrollo de la función $\sqrt[3]{8+x}$.

- §5. (a) Hallar el orden de los siguientes infinitésimos (para $x \rightarrow 0$):
- (i) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x - x - x^2$ (ii) $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$
 (iii) $f(x) = \operatorname{sh} x - x - \frac{x^3}{3!}$ (iv) $f(x) = x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}^2 x$
- (b) Hallar a y b para que $f(x) = x + a \operatorname{sen} x + b \operatorname{tg} x$ sea un infinitésimo del orden mayor posible para $x \rightarrow 0$.

§6. Calcular los siguientes límites:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \frac{x}{m}}{x^2}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$
 (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\operatorname{sen} x) - \cos x}{x^4}$ (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$
 (v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

- §7. (a) Sea $f : (a, b) \rightarrow [0, \infty)$ una función integrable. Probar que $\int_a^b f \geq 0$.
- (b) Sea $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es par si $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in (-a, a)$ y decimos que f es impar si $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in (-a, a)$. Probar que si f es par entonces $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$. Calcular $\int_{-a}^a f$ si f es impar.

§8. (a) Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{y } F(x) = \int_0^x f(t) dt. \text{ Bosquejar los gráficos de } f \text{ y } F.$$

- (b) Sea $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que $f(x) \geq 2$, para todo $x \in [-1, 0] \cup [2, 4]$ y $f(x) \geq 4$, para todo $x \in [0, 2]$.
- i. Probar que $\int_{-1}^4 f(x) dx \geq 14$.
- ii. Si además se sabe que $f(x) \geq 3$ para todo $x \in [1, 3]$, hallar $m \in \mathbb{R}$ tal que $14 < m < \int_{-1}^4 f(x) dx$.
- (c) Sea f una función continua en $[2, 8]$ tal que $\int_2^8 f(x) dx = 20$ y $\int_8^4 f(x) dx = 12$.
- i. Calcular $\int_2^4 f(x) dx$.
- ii. Probar que existe $c \in [2, 4]$ tal que $f(c) = 16$. ¿Existe $d \in [2, 8]$ tal que $f(d) = -1$?