Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2004

Práctico 5

§1. En los casos siguientes clasificar $\sum a_n$, donde el término general a_n es:

a) $a_n = n(\frac{2}{5})^n$ b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ c) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ d) $a_n = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = \frac{1}{n^{n+\frac{1}{n}}}$ f) $a_n = e^{-\sqrt{n+1}}$ g) $a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}$ h) $a_n = \frac{\operatorname{senh} n}{\cosh n}$

§2. Sabiendo que $a_n \geq 0$ y que $\sum a_n$ converge, clasificar las siguientes series, o mostrar con ejemplos que la convergencia depende del término general:
(a)$\sum \frac{1}{a_n}$ (b)$\sum a_n^2$ (c)$\sum \sqrt{a_n}$ (d)$\sum \log(1+a_n)$ (e)$\sum a_n\sqrt{a_{n^2}}$

§3. Clasificar: a) $\sum \frac{n^2}{3^n}$ b) $\sum \frac{n!}{n^n}$ c) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$ d) $\sum \frac{a^n n!}{n^n}$, $0 < a \neq e$.

§4. Clasificar las siguientes series, y calcular su suma cuando corresponda:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

§5. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dadas por $a_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$ y $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(a) Probar que $b_n < a_n < 3$, $\forall n \geq 1$ (para probar la primera desigualdad usar la fórmula de Newton para la potencia de un binomio).

(b) Demostrar que $\lim_n b_n \geq a_m$, $\forall m \geq 1$, y deducir que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

(c) Mostrar que $0 < e - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} < \frac{1}{n!n}$. Deducir de esto que e es irracional (si $e = \frac{p}{q}$, entonces $0 < pq! - q\sum_{j=0}^{q} \frac{q!}{j!} < 1$).

(d) Calcular e con una precisión de al menos 10^{-4}.

§6. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series divergentes de términos no negativos. ¿Qué se puede afirmar acerca de la convergencia de las series $\sum \text{mín}\{a_n, b_n\}$ y $\sum \text{máx}\{a_n, b_n\}$?

§7. Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos. Se le asocia una sucesión b_n tal que $b_0 = 0$ y $2b_{n+1} = b_n + \sqrt{b_n^2 + a_n}$, $\forall n \geq 0$. Mostrar que $\sum a_n$ converge si y sólo si (b_n) converge.

§8. Sea (a_n) una sucesión decreciente de términos no negativos, y sea (m_n) una sucesión creciente de números naturales, con $m_0 = 0$, y tal que para cierta constante $M \in \mathbb{R}$ se tiene que $m_{n+1} - m_n \leq M(m_n - m_{n-1})$, $\forall n \geq 1$.

(a) Probar que $\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n}(m_{j+1}-m_j)a_{m_j} \leq \sum_{j=0}^{m_n-1} a_j \leq \sum_{j=0}^{n-1}(m_{j+1}-m_j)a_{m_j}$.

(b) Probar que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge sii $\sum_{n=0}^{\infty}(m_{n+1}-m_n)a_{m_n}$ converge.

(c) Cuando $m_n = 2^n$ el resultado de (b) se conoce como *criterio de condensación de Cauchy*. Usando dicho criterio clasificar las series $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ y $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

§9. Averiguar si las series que siguen son condicional o absolutamente convergentes, o divergentes (cuando corresponda discutir según $\alpha \in \mathbb{R}$).

(a) $\sum (-1)^n \frac{n+3}{n^2}$ (b) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ (c) $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$

(d) $\sum \frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ (e) $\sum \frac{\ln(n)^\alpha \operatorname{sen} n}{n\sqrt{n+1}}$ (f) $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$

§10. Considérese las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ tales que para cada $n \geq 1$: $a_n := \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln(n+1)\right]$ y $b_n := \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln(n)\right]$.

(a) Mostrar que (a_n) y (b_n) forman un par de sucesiones monótonas convergentes. Su límite, que denotaremos por C, se conoce como la *constante de Euler*. Demostrar que $\lim_n \frac{1}{\ln(n)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1$, y deducir de esto que si $p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_n \sum_{j=np+1}^{qn} \frac{1}{j} = \ln(q/p)$.

(b) Usar (a) para sumar las series siguientes:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n}\right)$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

§11. Dados dos enteros positivos p y q, a partir de la serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ se construye una nueva serie tomando los primeros p términos positivos, luego los q primeros términos negativos, luego los siguientes p términos positivos, etc. Por ejemplo, si $p = 3$ y $q = 2$ se forma la serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$. Demostrar que la nueva serie es convergente y hallar su suma.

§12. (a) *Desigualdad de Cauchy–Schwarz.* Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números complejos. Demostrar la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

$$\left|\sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j\right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |\beta_j|^2\right)$$

Sugerencia: para cada j sea θ_j tal que $e^{i\theta_j}\bar{\beta}_j\alpha_j = |\alpha_j\beta_j|$; considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(t) = \sum_{j=1}^n |\alpha_j - e^{-i\theta_j}\beta_j t|^2$; observar que, como $f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, el polinomio $p = (\sum_{j=1}^n |\beta_j|^2)X^2 - 2(\sum_{j=1}^n |\alpha_j\beta_j|)X + (\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2)$ no puede tener discriminante positivo.

(b) Demostrar que si $\sum |a_n|^2$ y $\sum |b_n|^2$ son convergentes, entonces también lo son $\sum |a_n b_n|$ y $\sum |a_n + b_n|^2$.

(c) Mostrar que si (a_n) es una sucesión de números complejos tal que $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum \frac{n\sqrt{ia_n}}{n^2+2i}$ también converge.