Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Cálculo I–Curso 2004

Práctico 11

§1. Averiguar si las siguientes sucesiones de funciones son uniformemente convergentes en los intervalos indicados:

(a) $\frac{1}{x+n}$ en $(0,+\infty)$; (b) $\frac{nx}{1+n+x}$ en $[0,1]$; (c) $\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ en $\mathbb{R}$; (d) $\operatorname{sen}\frac{x}{n}$ en $\mathbb{R}$;

(e) $\frac{x^n}{1+x^n}$ en $[0,1-\epsilon]$, en $[1-\epsilon,1+\epsilon]$ y en $[1+\epsilon,+\infty)$, $\epsilon>0$.

§2. Supóngase que la sucesión de funciones continuas (f_n) converge uniformemente a la función f en el intervalo $[a,b]$. Probar que para toda sucesión (x_n) en $[a,b]$ que converge a x, entonces $f_n(x_n)$ tiende a $f(x)$ cuando $n\to+\infty$. ¿Es cierto el recíproco?

§3. Aplicando el criterio de la mayorante de Weierstrass demostrar la convergencia uniforme en los intervalos indicados de las siguientes series de funciones:

(a) $\displaystyle\sum \frac{1}{x^2+n^2}$ en $\mathbb{R}$; (b) $\displaystyle\sum \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ en $[\frac{1}{2},2]$

(c) $\displaystyle\sum x^2e^{-nx}$ en $[0,+\infty)$; (d) $\displaystyle\sum \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ en $|x|<a$.

§4. Sea (x) la parte fraccionaria del número real x, es decir: $(x)=x-[x]$. Considerar la función $f(x):=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hallar $D(f)$, el conjunto formado por todas las dicontinuidades de f. Observar que $D(f)\cap(a,b)\neq\emptyset$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Probar que, sin embargo, f es integrable según Riemann en todo intervalo acotado.

§5. A. Determinar el radio y el intervalo de convergencia, y estudiar el comportamiento en los puntos frontera del intervalo de convergencia, de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+427)^n}{(n+1)2^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}x^n}{2n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}x^n}{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n^2+1}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,\quad a,b>0$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n},\quad a,b>0$

B. En cada uno de los siguientes casos encontrar el conjunto de puntos x en los que las series dadas convergen:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{x^n} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n} \qquad \sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \qquad \sum_1^\infty \big(1+\frac{1}{n}\big)^{-n^2} e^{-nx}$$

§6. A. Calcular los desarrollos de Taylor en 0 de las siguientes funciones, y hallar los correspondientes intervalos de convergencia: $\operatorname{sh} x$, e^{-x^2}, $\operatorname{sen}(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$, $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$, $e^x \cos x$.

B. Aplicando derivación o integración término a término, según corresponda, calcular las sumas de las siguientes series:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \sum_{n=1}^\infty n x^n \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^\infty n(n+1)x^n$$

§7. Sea $f(x) := \sum_0^\infty a_n x^n$, donde $a_0 = 1$ y los restantes coeficientes están determinados por la identidad:

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^\infty \big(2a_n + (n+1)a_{n+1}\big)x^n.$$

Expresar a_{n+1} en términos de a_n, y a partir de esto hallar a_n, $\forall n \geq 0$. Obtenidos dichos coeficientes, calcular la suma correspondiente a $f(x)$.

§8. (a) Calcular aproximadamente $\operatorname{arctg} 1$ y $\ln 1{,}25$ y acotar los errores correspondientes.

(b) Sirviéndose de los desarrollos en serie de Taylor de los integrandos, calcular con exactitud hasta 0,01 las siguientes integrales:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad \int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} \qquad \int_0^1 x^x\,dx$$

(c) Hallar con exactitud hasta 0,01 la longitud del arco de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ $(0 \leq x \leq \pi)$.