

# 1. Complemento

## 1.1. Distribución normal en $\mathbb{R}^d$

Definimos la transformada de Fourier de un vector aleatorio  $W = (W_1, \dots, W_d)$  a valores en  $\mathbb{R}^d$  como:

$$\varphi_W(\lambda) = E(\exp[i\langle \lambda, W \rangle]) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}^d$$

**Definición 2.** Decimos que un vector aleatorio  $W$  a valores en  $\mathbb{R}^d$  tiene distribución normal, si su transformada de Fourier  $\varphi_W$  tiene la siguiente forma:

$$\varphi_W(\lambda) = \exp[i\langle \mu, W \rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma \lambda, \lambda \rangle]$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}^d$  y  $\Sigma$  es una matriz cuadrada ( $d$  por  $d$ ) simétrica, definida no negativa.

Se verifica que  $\mu = E(W)$ ,  $\Sigma = \text{var}(W)$  siendo  $E(W) = (E(W_1), \dots, E(W_d))^t$ ,  $\text{var}(W) = ((\Sigma_{jk}))_{j,k=1,\dots,d}$  con  $\Sigma_{jk} = E[(W_j - E(W_j))(W_k - E(W_k))]$

## 2.1. Funciones de Haar

Sea  $(L^2[0, 1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  con  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(u)g(u)du$ . Sabemos que es un espacio de Hilbert y además se puede probar que las funciones de Haar  $\{H_k^{(n)} : n \geq 0, k \in I(n)\}$  forman una base ortonormal completa de  $L^2[0, 1]$ . Para eso probemos que si una función  $f$  en  $L^2[0, 1]$  verifica que el producto interno  $\langle f, H_k^{(n)} \rangle = 0$  para todo  $n \geq 0$  y  $k \in I(n)$  entonces  $f$  es 0.

$$\int_0^1 f(u)du = \langle f, H_1^{(0)} \rangle = 0 \text{ (i)}$$

$$\int_0^{1/2} f(u)du - \int_{1/2}^1 f(u)du = \langle f, H_1^{(1)} \rangle = 0$$

entonces  $\int_0^{1/2} f(u)du = \int_{1/2}^1 f(u)du$  (ii)

y por lo tanto de (i) y (ii)  $\int_0^{1/2} f(u)du = \int_{1/2}^1 f(u)du = 0$ .

Y así por inducción en  $n$  tenemos que la integral de la función entre dos diádicos cualesquiera es 0, y como los diádicos son densos en  $[0, 1]$ , concluimos por el teorema de diferenciación de Lebesgue que la función es 0 m-ctp (siendo  $m$  la medida de Lebesgue en  $[0, 1]$ ):

$f(x) = \lim_n \frac{\int_{d_n}^{d'_n} f(u)du}{d'_n - d_n}$  siendo  $d_n$  y  $d'_n$  sucesiones de diádicos que convergen

por abajo y por arriba a  $x$  respectivamente. La anterior igualdad es verdad para casi todo  $x$  en  $[0,1]$ . Pero como las integrales entre los respectivos diádicos es 0,  $f$  debe ser 0 m-ctp, o sea  $f = 0$  en  $L^2[0,1]$ .

De esta manera tenemos probado que las funciones de Haar son una base ortonormal completa en  $L^2[0,1]$  y entonces vale la igualdad de Parseval:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \in I(m)} \langle f, H_k^{(m)} \rangle \langle g, H_k^{(m)} \rangle$$

En particular tenemos para  $s$  y  $t$  en  $[0,1]$ , tomando  $f = \text{Ind}_{[0,s]}$  y  $g = \text{Ind}_{[0,t]}$  que:

$$\begin{aligned} s \wedge t &= \langle f, g \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \in I(m)} \langle f, H_k^{(m)} \rangle \langle g, H_k^{(m)} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \in I(m)} S_k^{(m)}(s) S_k^{(m)}(t) \\ \Rightarrow s \wedge t &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k \in I(m)} S_k^{(m)}(s) S_k^{(m)}(t) \text{ siendo } S_k^{(n)}(t) = \int_0^t H_k^{(n)}(u) du. \end{aligned}$$

A la familia  $\{S_k^{(n)}(t) : n \geq 0, k \in I(n)\}$  se le llaman funciones de *Schauder*.

## 2.2. Teorema Central del Límite para sistemas triangulares (Lindeberg)

**Teorema 2.1.** Sea  $\{\eta_k^{(n)} : k = 1 \dots k_n\}_{n \geq 0}$  un sistema triangular de variables aleatorias con  $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} \eta_k^{(n)}$  y  $s_n^2 = \text{var}(S_n)$  tales que verifican lo siguiente:

Son independientes por filas, con  $E(\eta_k^{(n)}) = 0$ , y verifican la siguiente condición (condición de Lindeberg):

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{k_n} E((\eta_k^{(n)})^2 \text{Ind}_{\{|\eta_k^{(n)}| > \varepsilon s_n\}}) \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Entonces  $\frac{S_n}{s_n} \Longrightarrow \mathfrak{N}(0,1)$