

Práctico 9

En los ejercicios que siguen todos los espacios vectoriales que aparecen son de dimensión finita salvo que se diga lo contrario.

1. Indicar si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas:
 - a) Para cada valor propio de T existe exactamente un ciclo de T .
 - b) Sea T tal que $\chi_T(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_h)^{n_h}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Si \mathcal{B}_i es una base de $\text{Ker}(T - \lambda_i \text{id})^{n_i}$ para cada $i = 1, \dots, h$, entonces $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_h$ es una base de Jordan de T .
 - c) Para cada bloque de Jordan J , L_J tiene forma de Jordan J .
 - d) La forma de Jordan de una matriz diagonal es ella misma.
 - e) Matrices con la misma forma de Jordan son semejantes.
 - f) Toda matriz es semejante a su forma de Jordan.
 - g) Existe una única base de Jordan para cada operador.
2. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, λ un valor propio de T y \mathcal{C} un ciclo de T correspondiente al valor propio λ . Probar que \mathcal{C} es LI.
3. Para cada uno de los operadores T , encontrar la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.
 - a) $T = L_A$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
 - b) $T = L_A$ donde $A = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -5 \\ 21 & -8 & -11 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2[x])$ definido por $T(p(x)) = 2p(x) - p'(x)$.
4.
 - a) Sea T un operador y λ un valor propio de T . Probar que si $\text{rango}(T - \lambda \text{id})^m = \text{rango}(T - \lambda \text{id})^{m+1}$ para algún número natural m , entonces $\text{Ker}(T - \lambda \text{id})^n = \text{Ker}(T - \lambda \text{id})^m$ para todo n mayor o igual que m .
 - b) *Test de diagonalización.* Sea T un operador cuyo polinomio característico escinde. Supongamos que $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ son los valores propios distintos de T . Entonces T es diagonalizable si y solo si $\text{rango}(T - \lambda_i \text{id}) = \text{rango}(T - \lambda_i \text{id})^2$ para todo $i = 1, \dots, h$.
5. Sea T un operador tal que su forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Encontrar el polinomio característico y el polinomio minimal de T .
- b) Encontrar el diagrama de puntos correspondiente a cada valor propio de T .
6. Para cada una de las siguientes matrices A , encontrar su forma de Jordan y una matriz Q tal que $J = Q^{-1}AQ$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. ¿Cuáles de las siguientes matrices son semejantes entre sí?

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Sea A una matriz $n \times n$ cuyo polinomio característico escinde. Probar que A y A^t tienen la misma forma de Jordan y concluir que A y A^t son semejantes. (*Sugerencia:* Para cada valor propio λ de A y cualquier natural r , mostrar que $\text{rango}((A - \lambda I)^r) = \text{rango}((A^t - \lambda I)^r)$.)
9. Sea V el subespacio de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} generado por las funciones e^x , xe^x , x^2e^x y e^{2x} . Definimos $T : V \rightarrow V$ por $T(f) = f'$. Encontrar la forma de Jordan y una base de Jordan para T .
10. El objetivo de este ejercicio y del siguiente es probar que si el polinomio característico de un operador T escinde, entonces T se escribe de forma única como $T = S + N$, donde S es diagonalizable, N es nilpotente y $S \circ N = N \circ S$. Esta descomposición se llama la *descomposición de Jordan* del operador T .

Sea T un operador cuyo polinomio característico escinde y supongamos que

$$\chi_T(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_h)^{n_h} \text{ con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

- a) Probar que para todo $v \in V$ existen únicos vectores $v_i \in \text{Ker}(T - \lambda_i \text{id})^{n_i}$, $i = 1, \dots, h$ tales que $v = v_1 + \cdots + v_h$.
- b) Sea $S : V \rightarrow V$ definido por $S(v) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_h v_h$ y sea $N = T - S$. Probar que S es diagonalizable, N es nilpotente y $S \circ N = N \circ S$.
- c) Si \mathcal{B} es una base de Jordan para T , describir $[S]_{\mathcal{B}}$ y $[N]_{\mathcal{B}}$.
11. Sean T , S y N operadores en un mismo espacio vectorial V tales que $T = S + N$ donde S es diagonalizable, N nilpotente y $S \circ N = N \circ S$. Probar que T y S tienen el mismo polinomio característico y que S es el definido en la parte b) del ejercicio anterior.

(*Sugerencia:* Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ los valores propios distintos de S y $E_i := \text{Ker}(S - \lambda_i \text{id})$, $i = 1, \dots, h$. Observar que E_i es N invariante y que $N|_{E_i} \in \mathcal{L}(E_i)$ es nilpotente. Para cada $i = 1, \dots, h$ sea \mathcal{B}_i una base de Jordan para $N|_{E_i}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$. Calcular $[T]_{\mathcal{B}}$.)

Observar que esto prueba la unicidad de la descomposición de Jordan de T .

12. Hallar la descomposición de Jordan de los operadores del ejercicio 3.
13. Sean V un \mathbb{R} -espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(V)$ tales que $\dim V = 6$ y $V = U \oplus W$ siendo U y W subespacios T -invariantes.

- a) Se sabe que existen $w_1, w_2 \in W$ tales que $\{w_1, w_2\}$ es una base de W , $T(w_1) = 2w_1 + w_2$ y $T(w_2) = -w_1$. Hallar la forma de Jordan de $T|_W$.
- b) Sabiendo que:
- 1) $(T|_U - 2 \text{id}_U)^2 = 0$.
 - 2) No existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T|_U = \lambda \text{id}_U$.
 - 3) Existe un conjunto linealmente independiente $\{u_1, u_2, u_3\} \subset U$ formado por vectores propios de T con valor propio 2.

Hallar la forma de Jordan de $T|_U$.

- c) Hallar la forma de Jordan de T .

14. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ que verifica $T^5 - 6T^4 + 8T^3 + 6T^2 - 9T = 0$.

- a) Hallar los posibles valores propios de T .
- b) Si T es sobreyectiva y $T + \text{id}$ es inyectiva, dar los posibles polinomios minimales de T .
- c) Si además T no es diagonalizable, hallar las posibles formas de Jordan de T y los respectivos polinomios característicos.
- d) En las hipótesis de (14c), si $T = S + N$ es la descomposición de Jordan de T con S diagonalizable y N nilpotente, hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $N^n = 0$.

15. Sean $A, B, C, D \in M_7(\mathbb{R})$ tales que:

- $\{(A - 3I)^3v, (A - 3I)^2v, (A - 3I)v, v, Au, u, w\}$ es base de \mathbb{R}^7 con

$$(A - 3I)^4v = A^2u = Aw = 0.$$

- - El polinomio característico de B solo tiene raíces 0 y 3.
 - El diagrama de puntos para B correspondiente al valor propio 3 es

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \end{array}$$

- El polinomio minimal de B es de la forma $m_B(x) = p(x)x$, donde $p(x)$ no se anula en 0.
- $\text{rango}(C) = 6$, $\text{rango}(C^2) \neq \text{rango}(C^3)$, $\text{rango}(C^3) = \text{rango}(C^4)$, $\text{rango}(C - 3I) = 3$.
- $D^4 - 6D^3 + 9D^2 = 0$, $\dim \text{Ker } D = 2$, $\text{rango}(D^2) = 5$, $\dim \text{Ker}(D - 3I) = 3$.

- a) Hallar las formas de Jordan de A, B, C y D .
- b) Hallar los polinomios característico y minimal de A, B, C y D .
- c) ¿Son A, B, C y D semejantes? (Justificar la respuesta.)